南京航空航天大学

2012 年硕士研究生入学考试初试试题（ A 卷）

科目代码： 601 科目名称： 数学分析 满分： 150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

1．（12 分）求下列极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$

（2）设 $a_1=\sqrt{\dfrac{1}{2}},\ a_n=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}a_{n-1}}\quad(\mathrm{n}=2,3,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_1a_2\cdots a_n$

2．（13 分）设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上，如果存在常数 $L>0$，使得对任意 $x_1,x_2\in I$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le L|x_1-x_2|$，则称 $f(x)$ 在 I 上 Lipschitz 连续。

（1）证明在 I 上 Lipschitz 连续的函数 $f(x)$ 一定是一致连续的；

（2）给出 $f(x)$ 在 I 上不 Lipschitz 连续的定义；

（3）给出一个具体函数 $f(x)$，并证明它在其定义区间 I 上是一致连续的，但不是 Lipschitz 连续的。

3．（13 分）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微，且 $0\le f'(x)\le f(x)$，$f(0)=0$。证明：在 $[0,+\infty)$ 上，$f(x)\equiv 0$。

4．（12 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有二阶导数，且满足 $|f(x)|\le a$，$|f''(x)|\le b$（$a>0,\ \mathrm{b}>0$ 是常数），证明对一切 $x\in(0,1)$，成立 $|f'(x)|\le 2a+\dfrac{b}{2}$。

5．（12 分）求不定积分 $\int(\ln\ln x+\dfrac{1}{\ln x})dx$。

6．（13 分）讨论反常积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^p}dx$ 的敛散性。

7．（12 分）已知 $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$，证明$\{f_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上不一致收敛；但对任一$\delta>0$, $\{f_n(x)\}$在$(\delta,+\infty)$上一致收敛。

8．（13 分）将函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x(-\pi<x<\pi)$ 展开为 Fourier 级数,并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$的和。

9．（13 分）已知 $x^2+y^2+z^2=a^2$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。

10．（12 分）求 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在椭球$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$上的点$P(x_0,y_0,z_0)$处沿外法线方向的导数。

11．（12 分）设V是椭球体$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$, 试计算$I=\iiint\limits_V (x+y+z)^2\,dV.$

12．（13 分）计算曲面积分$I=\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+x^2dxdy$，其中$S$为锥面 $x^2+y^2=z^2(0\le z\le h)$那部分的外侧。