

南京航空航天大学

2013 年硕士研究生入学考试初试试题 (A 卷)

科目代码: 601

满分: 150 分

科目名称: 数学分析

注意: 认真阅读答题纸上的注意事项; 所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; 本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

- (12 分) 用极限定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ 不存在。
- (12 分) 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right)$ 。
- (13 分) 设函数 $f(x)$ 定义在闭区间 $[a, b]$ 上, 且单调递增。证明: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续的充分必要条件是 $f(x)$ 的值域为闭区间 $[f(a), f(b)]$ 。
- (13 分) 证明: 一个数列 $\{a_n\}$ 存在收敛的子列当且仅当 $\{a_n\}$ 不是无穷大量。
- (12 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内存在导函数 $f'(x)$, 证明 $f'(x)$ 在 (a, b) 内或者连续, 或者有第二类间断点。
- (13 分) (1) 先计算积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 。
(2) 再先计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2} dx$ 。
- (12 分) 将函数 $(x) = \arcsin x$ 在 $x=0$ 展成为幂级数, 并证明其在 $[0, 1]$ 上一致收敛。
- (12 分) 证明函数 $F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ 在 $(0, +\infty)$ 连续。
- (12 分) 设 $u = x^2 + y^2 + z^2$, 其中 $z = f(x, y)$ 是由方程 $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ 所确定的隐函数, 求 u_x, u_y 。
- (13 分) 计算曲线积分 $\int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, 其中 L 是维维安尼曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax (z > 0, a > 0)$, 若从 x 轴正向看去, L 是沿逆时针方向进行的。

11. (13分) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{axdydz + (a+z)^2 dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$ ($a > 0$), 其中 Σ 是下半球面

$z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, 方向取上侧。

12. (13分) 已知 $f(x)$ 在 $(0, \pi/2)$ 可积或者绝对可积, 应分别对它进行怎样的延拓, 才能使它在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 级数的形式为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x?$$