2-4 变元的约束

2-4.1变元的约束

定义1：指导变元（作用变元）

谓词公式中的一部分公式形式为(∀x)P(x)，或(∃x) P(x)，这里的∀，∃，后面所跟的x，称为相应量词的指导变元（作用变元）。

例如：$(\exists \underline{x})(F(x)\wedge(\forall \underline{y})(G(y)\rightarrow H(x,y)))$

2-4 变元的约束

定义2：量词作用域（量词辖域）：

给定谓词公式中，形式为$(\forall x)P(x)$，$(\exists x)\ P(x)$中的$P(x)$称为相应量词的作用域（辖域）。

例如:

$$(\exists x)(\ F(x) \wedge \underline{(\forall y)(\ G(y) \rightarrow H(x,y)\ )}\ )$$

2-4 变元的约束

定义3：约束变元(bound variable)：

在作用域中x的一切出现，称为x在该谓词公式中的约束出现，所有约束出现的变元，叫做约束变元。

例如:

$(\exists x)(F(\underline{x}) \land (\forall y)(G(\underline{y}) \rightarrow H(\underline{x},\underline{y})))$

2-4 变元的约束

定义4：自由变元(free variable)：

在谓词公式中，除去约束变元以外所出现的变元，称作自由变元。

自由变元可以在作用域外出现，也可以在作用域中出现，但它不受相应量词中的指导变元的约束，故我们可把自由变元看作是公式中的参数。

例如: **$(\forall y)\,(G(y) \rightarrow H(x, y))$**

举例说明：P63 例1

例题1 说明以下各式的作用域与变元约束的情况。

a) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$。

解 a) $(\forall x)$的作用域是$P(x)\rightarrow Q(x)$，x为约束变元。

b) $(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists y)R(x,y))$。

解 b) $(\forall x)$的作用域是$(P(x)\rightarrow(\exists y)R(x,y))$，$(\exists y)$的作用域是$R(x,y)$，$x$，$y$都是约束变元。

c) $(\forall x)(\forall y)\,(P(x,y)\wedge Q(y,z))\wedge(\exists x)P(x,y)$。

解 c) $(\forall x)$和$(\forall y)$的作用域是 $(P(x,y)\wedge Q(y,z))$，其中x，y是约束变元，z是自由变元。$(\exists x)$的作用域是$P(x,y)$，其中x是约束变元，y是自由变元。在整个公式中，x是约束出现，y既是约束出现又是自由出现，z是自由出现。

d) $(\forall x)\,(P(x)\wedge(\exists x)Q(x,z)\rightarrow(\exists y)R(x,y))\vee Q(x,y)$。

解 d) $(\forall x)$的作用域$(P(x)\wedge(\exists x)Q(x,z)\rightarrow(\exists y)R(x,y))$，x和y都是约束变元，但$Q(x,z)$中的x是受 $\exists x$ 的约束，而不是受 $\forall x$ 的约束。$Q(x,y)$中的x，y是自由变元。

2-4.2换名(rename)规则

对公式中的约束变元，遵照一定规则更改名称符号，称为约束变元的换名。

把某个指导变元和其量词作用域中所有同名的约束出现, 都换成某个新的个体变元符号。

即作用域中没有出现的变元名称。

例如:

$(\forall x)(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall y)(A(y)\wedge B(y))$

$(\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x) \Leftrightarrow (\forall y)A(y)\wedge(\forall z)B(z)$

$H(x,y)\vee(\exists x)F(x)\vee(\forall y)(G(y)\rightarrow H(x,y))$

$\Leftrightarrow H(x,y)\vee(\exists z)F(z)\vee(\forall u)(G(u)\rightarrow H(x,u))$

2-4.3代入(substitute)规则

对于公式中的自由变元，也允许更改，这种更改叫做代入。

把某个自由变元的所有出现，都换成某个新的个体变元符号，即原公式中没有出现的变元名称。

例如:

$$A(x)\wedge B(x) \Leftrightarrow A(y)\wedge B(y)$$

$$(\forall x)A(x)\wedge B(x) \Leftrightarrow (\forall x)A(x)\wedge B(y)$$

$$H(x,y)\vee(\exists x)F(x)\vee(\forall y)(G(y)\rightarrow H(x,y))$$

$$\Leftrightarrow H(s,t)\vee(\exists x)F(x)\vee(\forall y)(G(y)\rightarrow H(s,y))$$

2-4.4 消去量词

需要指出，量词作用域中的约束变元，当论域的元素是有限时，客体变元的所有可能的取代是可枚举的。

设论域元素为a_1，a_2，…，a_n。为有限个体域。

则

$$(\forall x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)$$

$$(\exists x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \ldots \vee A(a_n)$$

2-4.4 消去量词

例: 个体域D={a,b,c}, 则 $(\exists x)(\forall y)F(x,y)$

$\Leftrightarrow (\exists x)(F(x,a)\wedge F(x,b)\wedge F(x,c))$

$\Leftrightarrow (F(a,a)\wedge F(a,b)\wedge F(a,c))\vee$

$(F(b,a)\wedge F(b,b)\wedge F(b,c))\vee$

$(F(c,a)\wedge F(c,b)\wedge F(c,c))$

示例：P65 (2) a), b) , (3) a)

2-4.4消去量词

P65 (2) a)

$(\forall x)P(x) \Leftrightarrow P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$

e)

$(\forall x)R(x) \wedge (\exists x)S(x) \Leftrightarrow (R(a) \wedge R(b) \wedge R(c)) \wedge (S(a) \vee S(b) \vee S(c))$

(3) a)

$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (P(1) \vee Q(1)) \wedge (P(2) \vee Q(2)) \Leftrightarrow (T \vee F) \wedge (F \vee T) \Leftrightarrow T$

2-4.5量词的次序：

命题中的多个量词，约定从左到右的次序读出。量词对变元的约束，量词的次序不能更改，否则与原命题意义不符。

比如：对任意的x，存在y，使得x+y=5。取个体域为实数集。

设：$H(x,y)$：$x+y=5$

则有：$(\forall x)(\exists y)H(x,y)$。这是一个真命题。

但是如果将量词顺序颠倒，得

$$(\exists y)(\forall x)H(x,y)$$

此式的含义为“存在着y，对于任意的x，都有x+y =5”，这就成了假命题。

作业(2-4)

P65 (2) c) d)

(4) a)

(5) b)