电动力学

第二十三讲

西安石油大学理学院
应用物理系

二. 狭义相对论的基本原理

- **相对性原理：**所有惯性参考系都是等价的；物理规律对所有惯性参考系均可表示为相同形式

- **光速不变原理：**真空中，光速相对于任何惯性系沿任一方向恒为c，并与光源的运动无关

❖ 它否定了经典的速度公式，即否定伽利略变换。

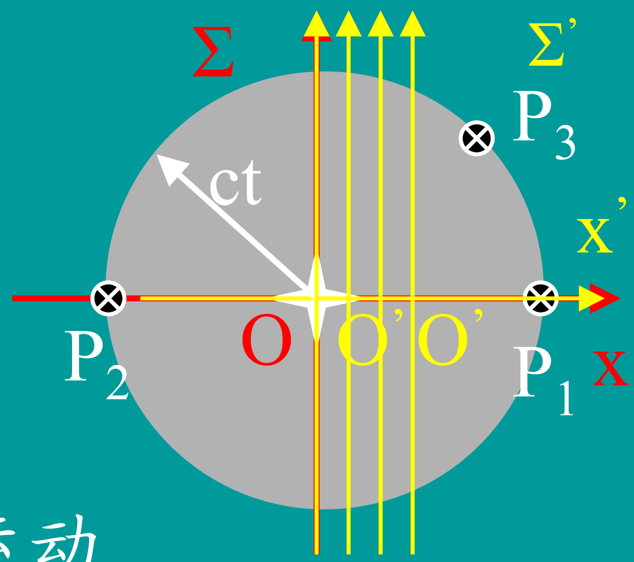
❖ 虽然光速大小在不同参照系中均一样，但其方向在不同参照系中可以不同。

❖ 由于光速数值不变，这导致不同参照系中的时间、空间的概念要发生关系

注意

1）时空观的修改主要体现在光速不变原理中，即若承认光速是不变的，则同时性就是相对的。

例如：在不同惯性系上观察发光和接受光的事件



- 闪光点在Σ系的原点O
- 经过时间t后，光波的波阵面到达半径为ct的地方
- 设Σ'系以速度v沿x轴相对于Σ系运动
- 取闪光点在Σ'系的原点O'，即t=0时刻O与O'重合

结论：同时具有相对性

2） 在经典力学时空观中相互分离的时间和空间，在相对论中则不再是分离的，而是和物质的运动联系在一起的

伽利略变换是经典力学基本原理的数学表述

洛仑兹变换为相对论基本原理的数学表述

1．事件

- 在某时某地发生的一个物理现象可称作一个事件
- 一个事件可由一个四维坐标(x,y,z,t)表示
- 一个事件是四维时空中的一个点，那么，一个物理过程就是四维时空中的一条曲线

2．间隔和间隔不变性

事件1（发光）在Σ系中的坐标为(0,0,0,0)

事件2（接收到光）在Σ系中的坐标为(x, y, z, t)

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2 \Rightarrow c^2t^2-x^2-y^2-z^2=0$$

两事件之间的间隔S^2：$\boxed{S^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2}$

事件1在Σ系中的坐标为(x_1,y_1,z_1,t_1)

事件2在Σ系中的坐标为(x_2,y_2,z_2,t_2)

两事件的间隔S^2：

$$S^2 = c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2$$

- 间隔是相对论的一个基本概念，它描述了四维时空中两点之间的联系
- 当两事件是由光联系起来的时候，则其间隔为零

条件：

1) 在惯性系中变换

2) 满足相对论的两条基本原理

3) 不讨论引力场的问题

性质：

- 变换是线性的
- 变换与坐标系的选择无关
- 变换应是连续和可逆的

在惯性系 Σ 中

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}t$$

在惯性系 Σ'中

$$\vec{x}' = \vec{x}_0' + \vec{v}'t'$$

$\vec{x}$ 与 $\vec{x}'$ 之间必为线性变换

可逆性

Σ 系方程

Σ'系方程

连续性

Σ 系方程

Σ''系方程

Σ'系方程

事件1
在Σ系中坐标(0,0,0,0)
在Σ'系中坐标(0,0,0,0)

事件2
在Σ系中坐标(x,y,z,t)
在Σ'系坐标(x',y',z',t')

❖事件1为发光，事件2为接收到光

Σ： $x^2+y^2+z^2=c^2t^2 \rightarrow S^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2=0$

Σ'： $x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2 \rightarrow S'^2=c^2t'^2-x'^2-y'^2-z'^2=0$

$\rightarrow \boxed{S^2=S'^2}$

❖$S^2\neq 0$， $S'^2 \neq 0$

- 因S^2与S'^2为二次式，且$S^2=0$定有$S'^2=0$，则A仅是与变量x,y,z,t无关的常因子

线性变换 ↓ $S'^2=AS^2$

Σ与Σ'等价 ↓ $S^2=AS'^2$

- 变换与坐标系选择无关，故A最多与Σ和Σ'的相对速度绝对值有关

$A^2=1 \Rightarrow A=\pm 1$

- A=-1

$$S'^2 \underset{\text{变换}}{\overset{\text{一次}}{=}} -S^2$$

$$-S'^2 \underset{\text{变换}}{\overset{\text{二次}}{=}} S''^2 \underset{\text{变换}}{\overset{\text{一次}}{=}} -S^2$$

⇒ 变换不连续

- A=1 同理可证变换连续

$$\boxed{A=1}$$

结论：任意两事件有$S^2=S'^2$，即在相对论时空中，两事件的间隔是不变的

意义：

- 间隔不变性是狭义相对论基本原理的直接结果，它也是相对论基本原理的数学表示
- 由间隔不变性可以看出，在相对论的时空中时间和空间是不可分的
- 间隔有两种特殊情况

i. 对同一地点的两事件，有$S^2=c^2\Delta t^2$

ii. 同时不同地的两事件，有$S^2=-(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)$

三．洛仑兹变换

——两惯性系之间同一事件时空坐标的变换关系

某事件
在Σ系中坐标(x,y,z,t)
在Σ’系中坐标(x’,y’,z’,t’)

一般

$$\begin{cases} x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \alpha_{14}(ct) \\ y' = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + \alpha_{24}(ct) \\ z' = \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + \alpha_{34}(ct) \\ ct' = \alpha_{41}x + \alpha_{42}y + \alpha_{43}z + \alpha_{44}(ct) \end{cases}$$

条件:

- Σ系与Σ’系空时原点重合
- Σ’系相对于Σ系作匀速运动
- 变换是线性
- 变换在一定条件下应回到伽利略变换

Σ’系沿Σ系x轴以速度v运动

特殊

$$\begin{cases} x' = \alpha_{11}x + \alpha_{14}(ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \alpha_{41}x + \alpha_{44}(ct) \end{cases}$$

条件：

- Σ系和Σ'系各轴平行，其中x与x'轴重合，各轴正向相同

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

$$= [\alpha_{41}x + \alpha_{44}(ct)]^2 - [\alpha_{11}x + \alpha_{14}(ct)]^2 - y^2 - z^2$$

$$= (\alpha^2{}_{44} - \alpha_{14}{}^2)c^2t^2 - (\alpha^2{}_{11} - \alpha^2{}_{41})x^2 - y^2 - z^2$$

$$+ 2(\alpha_{41}\alpha_{44} - \alpha_{11}\alpha_{14})xct$$

$$= c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

间隔不变性

$$\alpha^{2}{}_{44}-\alpha_{14}{}^{2}=1 \quad ①$$

$$\alpha^{2}{}_{11}-\alpha^{2}{}_{41}=1 \quad ②$$

$$\alpha_{41}\alpha_{44}-\alpha_{11}\alpha_{14}=0 \quad ③$$

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_{44}=\sqrt{1+\alpha_{14}^{2}}\\ \alpha_{11}=\sqrt{1+\alpha_{41}^{2}}\\ \quad ③\end{array}\right.$$

$$\alpha_{14}=\alpha_{41}$$

$$\alpha_{11}=\alpha_{44}$$

$$0=\alpha_{11}vt+\alpha_{14}(ct) \quad ④$$

$$-\frac{c}{v}\alpha_{14}=\alpha_{11}$$

Σ’: x’=0　　Σ: x=vt

O’点坐标

x轴与x’轴正向同 → $\alpha_{11}>0$

③

t轴与t’轴正向同 → $\alpha_{44}>0$

$$\alpha_{14}\alpha_{41}=\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{44}}\alpha_{14}^{2}$$

$$x'=\alpha_{11}x+\alpha_{14}(ct) \qquad y'=y$$

$$ct'=\alpha_{41}x+\alpha_{44}(ct) \qquad z'=z$$

$\alpha_{14}\alpha_{41}>0$

② $\alpha^2_{11}-\alpha^2_{41}=1 \Rightarrow \alpha_{11}=\sqrt{1+\alpha^2_{41}}$

④ $0=\alpha_{11}vt+\alpha_{14}(ct) \Rightarrow \alpha_{11}=-\dfrac{c}{v}\alpha_{14}$

$\alpha_{14}=\alpha_{41}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha_{14}=\alpha_{41}=\dfrac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$

④ $0=\alpha_{11}vt+\alpha_{14}(ct) \Rightarrow \alpha_{11}=-\dfrac{c}{v}\alpha_{14}$

$\alpha_{11}=\alpha_{44}$

$\boxed{\alpha_{14}=\dfrac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha_{11}=\alpha_{44}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$

特殊洛仑兹变换

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

-v

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

说明：

- 时间和空间是不可分的
- 时间和空间与物质运动相关
- 洛仑兹变换是相对论基本原理的数学表述

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \xrightarrow{-v} \begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

- 当坐标系的相对速度v<<c时，洛仑兹变换退回到伽利略变换

- 洛仑兹变换只表明c为极限，但并不排除有超光速粒子的存在

§3　相对论的时空理论

一．间隔分类——相对论的时空结构

O事件(0,0,0,0)

P事件(x,y,z,t)

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

间隔：$S^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t^2 - r^2$

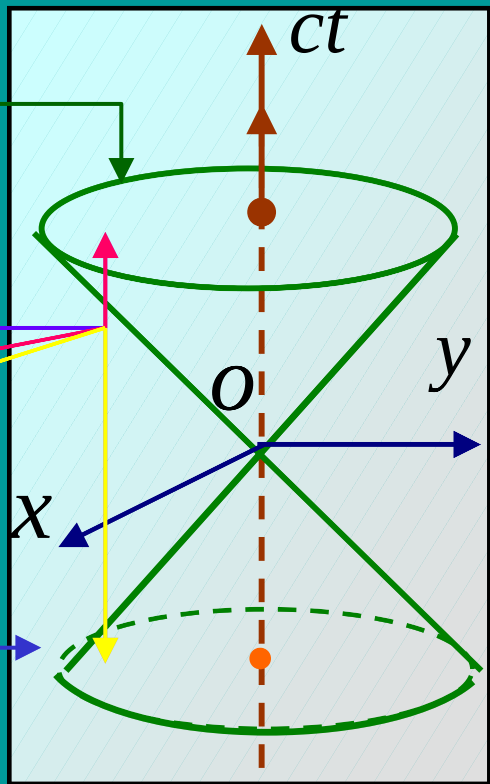
1) $S^2=0$，$ct=r$：类光间隔；由光相互作用联系

2) $S^2>0$，$ct>r$：类时间隔；由低于光速的相互作用联系

a. $t>0$时称为绝对未来

b. $t<0$时称为绝对过去

3) $S^2<0$，$ct<r$：类空间隔；不可能由光或低于光速的相互作用联系



注意：

- 间隔的划分是绝对的

若Σ系中两事件的间隔$S^2>0$，则当变换到Σ'系中时仍有$S'^2>0$

- 洛仑兹变换保持时间正向不变

二．因果律

第一事件P_1（原因）
在Σ系中坐标(x_1,t_1)
在Σ'系中坐标(x'_1,t'_1)

第二事件P_2（结果）
在Σ系中坐标(x_2,t_2)
在Σ'系中坐标(x'_2,t'_2)

若$t_2>t_1$，证在类时间隔中有$t'_2>t'_1$

洛仑兹变换

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_2' - t_1'$$

$$= (t_2 - t_1) \frac{1 - \frac{v}{c^2} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = u$$

v为Σ’相对于Σ的运动速度

在u<c，v<c时，当$t_2>t_1$，必有$t'_2>t'_1$，
结论：在类时间隔中才能保证事物的因果关系有绝对意义

$$t_2'-t_1'=(t_2-t_1)\frac{1-\frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

间隔类空

三．同时相对性

第一事件P_1(原因)
在Σ系中坐标(x_1,t_1)
在Σ'系中坐标(x'_1,t'_1)

第二事件P_2(结果)
在Σ系中坐标(x_2,t_2)
在Σ'系中坐标(x'_2,t'_2)

Σ系内有$t_2>t_1$说明t'_1和t'_2的关系

洛仑兹变换

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \quad t_2' - t_1' = (t_2 - t_1)\frac{1-\frac{v}{c^2}\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= (t_2 - t_1)\frac{1-\frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_2' - t_1' = (t_2 - t_1)\frac{1 - \frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

两事件类空 → $S^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 < 0$ → $|u| > c$

$t_2 > t_1$ → $1 < \frac{v}{c^2}\left|\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right|$ → $t'_1 > t'_2$

$v = c^2/u$ → $t'_1 = t'_2$

结论：类空间隔，时间顺序已无绝对意义

Σ系：$x_1 \neq x_2$，$t_1 = t_2$

类空间隔

$$\Sigma : S^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2$$

$$\Sigma' : S'^2 = c^2(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2$$

$S^2 = S'^2 < 0$

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x_2' - x_1' = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \quad t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{x'_1 \neq x'_2, \quad t'_1 \neq t'_2}$$

$x_1 < x_2 \Rightarrow t'_1 > t'_2$ $\qquad$ $x_1 > x_2 \Rightarrow t'_1 < t'_2$

注意

- 同时的相对性:对于类空间隔，若在某一惯性系看来是同时发生的两事件，在另一惯性系看来则不再同时发生
- 同一惯性系内对准时解的问题，由经典力学即可解决