

A scenic photograph of a valley at sunset. The sun is low on the horizon, creating a bright lens flare and illuminating the clouds. The mountains on either side are silhouetted against the sky. The text is overlaid on this image.

电动力学

第二十五讲

西安石油大学理学院
应用物理系



§ 4 相对论理论的四维形式

一. 正交变换

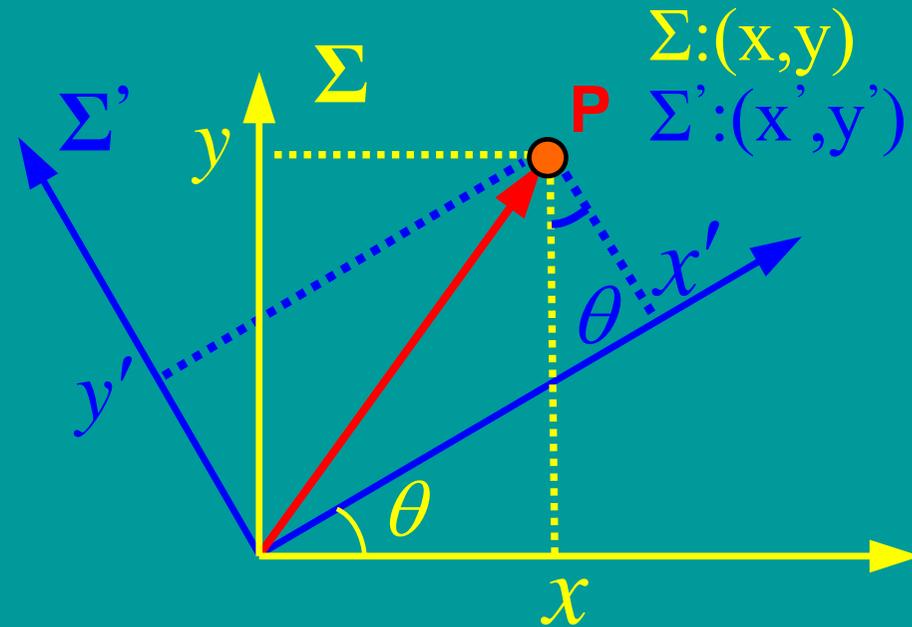
1. 二维正交变换

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

正交条件

$$OP^2 = x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 = \text{不变量}$$

正交变换：距离保持不变的二维平面上的线性变换





二维正交变换

正交条件

一般形式

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

$$x_1'^2 + x_2'^2 = x_1^2 + x_2^2 \\ = \text{不变量}$$

爱因斯坦符号

$$x'_i = a_{ij}x_j$$

$$x'_i x'_i = x_i x_i = \text{不变量}$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\tilde{a}a = I$$



2. 三维正交变换

——满足距离不变性的三维空间的线性变换

(x_1', x_2', x_3') Σ' 系 —— P —— Σ 系: (x_1, x_2, x_3)

三维正交变换

一般形式

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

爱因斯坦符号

$$x_i' = a_{ij}x_j$$

正交条件

$$\begin{aligned} & x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ &= \text{不变量} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_i'x_i' = x_i x_i \\ &= \text{不变量} \end{aligned}$$



三维正交变换

正交条件

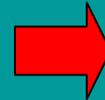
矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{a}a = I$$

爱因斯坦符号

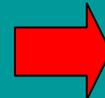
$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$



$$x'_i = a_{ij}x_j$$



$$\begin{aligned} & x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 \\ & = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \text{不变量} \end{aligned}$$



$$x_i'^2 = x_i'^2$$





约定

- 1) 取消求和符号
- 2) 凡是具有重复下标的变量均进行求和运算
- 3) 求和可以任意改变次序

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \rightarrow x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j$$

$\Leftrightarrow x'_i = a_{ij}x_j$

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \text{不变量}$$

$\rightarrow \sum_{i=1}^3 x_i^2 = \sum_{i=1}^3 x_i'^2$

$x'_i x'_i = x_i x_i = \text{不变量}$

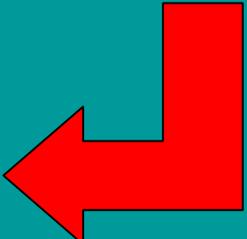


$$\sum_{i=1}^3 x_i'^2 = \sum_{i=1}^3 x_i' x_i' = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right) \left(\sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k \right)$$

$$= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 (a_{ij} \cdot a_{ik}) x_j x_k \right) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\delta_{jk} x_j x_k)$$


$$\sum_{i=1}^3 (a_{ij} \cdot a_{ik}) = \delta_{jk}$$

$$= \sum_{j=1}^3 (x_j x_j)$$

$$x_i' x_i' = x_i x_i$$




3. 四维空间的转动

洛仑兹变换是满足间隔不变的线性变换

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

乘以-1

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

$x_4 = ict$

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

间隔
不变

四维空间正交变换：满足间隔不变性的四维空间的线性变换

洛仑兹变换为正交变换



四维空间正交变换

正交条件

一般形式

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ x'_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 \\ = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \end{aligned}$$

爱因斯坦符号

$$x'_\mu = a_{\mu r} x_r$$

$$x'_\mu x'_\mu = x_\mu x_\mu$$

矩阵形式

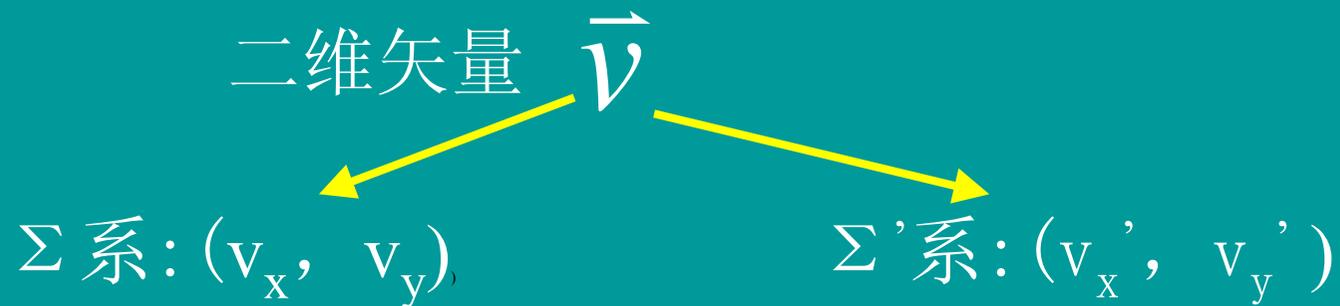
$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{a}a = I$$

注意：i, j, k, l等表示对1-3求和，而用希腊字母μ, ν, λ, τ等表示对1-4求和



4. 矢量的变换



变换关系

长度

$$\begin{cases} v'_x = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta \\ v'_y = -v_x \sin \theta + v_y \cos \theta \end{cases} \quad |\vec{v}|^2 = v'^2_x + v'^2_y = v^2_y + v^2_x$$

三维矢量变换可以得到类似的变换关系

结论: 任意矢量的变换具有与坐标转动变换相同的形式



二. 物理量按空间变换性质分类

1. 定义

❖ 标量：坐标系转动时，保持不变的物理量

例如：质量，电荷，空间距离等

❖ 矢量：坐标系转动时，物理量的三个分量按与坐标相同的方式变换

例如：速度，加速度，电场强度及微分算符等

❖ 二阶张量：坐标系转动时，物理量的9个分量按 $T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl}$ 方式变换

例如：应力张量，电四极矩张量等



2. 标量, 矢量, 张量的关系

物理量分类	变换关系	分量数	自由指标数
标量	$u' = u$	1	0
矢量	$v'_i = a_{ij} v_j$	3	1
二阶张量	$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl}$	9	2

标量: 没有自由指标, 又称为零阶张量;

矢量: 一个自由指标, 又称为一阶张量;

二阶张量: 两个自由指标, 又称为二阶张量。



例一：两矢量的内积

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_i w_i \quad \text{无自由指标为标量}$$

$$\begin{aligned} v_i' w_i' &= a_{ik} v_k a_{il} w_l = a_{ik} a_{il} v_k w_l \\ &= \delta_{kl} v_k w_l = v_k w_k \end{aligned} \quad \text{满足标量变换规则}$$

例二：张量与矢量点积

$$\vec{T} \cdot \vec{V} = T_{ij} V_j \quad \text{一个自由指标为矢量}$$

$$\begin{aligned} T'_{ij} V'_j &= a_{ik} a_{jl} T_{kl} a_{jn} V_n = a_{ik} a_{jl} a_{jn} T_{kl} V_n \\ &= a_{ik} \delta_{ln} T_{kl} V_n = a_{ik} T_{kl} V_l \end{aligned} \quad \text{满足矢量变换规则}$$



3. 四维协变量

洛仑兹协变量：一个物理量对洛仑兹变换有确定的变换关系

分类

1) 洛仑兹标量（不变量）：洛仑兹变换下不变的物理量

2) 四维矢量：具有四个分量的物理量 V_{μ} 。在惯性系变换下与坐标有相同的变换关系，即

$$V'_{\mu} = a_{\mu\nu} V_{\nu}$$

3) 四维张量：具有16个分量的物理量 $T_{\mu\nu}$ 。惯性系变换下满足 $T'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} T_{\lambda\tau}$



物理量分类	变换关系	分量数	自由指标数
洛仑兹标量	$u'=u$	1 (4^0)	0
四维矢量	$V'_\mu = a_{\mu\nu} V_\nu$	4 (4^1)	1
四维张量	$T'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} T_{\lambda\tau}$	16 (4^2)	2

- 洛仑兹标量

例如：间隔 dS^2 ，固有时间 $d\tau$ ，固有长度 dl_0 ，静止质量等

固有时间间隔 $d\tau$ 为不变量的说明

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma \text{系} \quad S^2 = c^2 d\tau^2 \\ \Sigma' \text{系} \quad S'^2 = c^2 d\tau'^2 \end{array} \right\} \longrightarrow c^2 d\tau^2 = c^2 d\tau'^2 \longrightarrow d\tau = d\tau'$$



- 四维矢量

四维位移 dx_μ 为四维矢量 $d\tau$ 为洛仑兹标量

定义四维速度矢量: $U_\mu = dx_\mu / d\tau$ $U'_\mu = a_{\mu\nu} U_\nu$

$$U_i = \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{dx_i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{c^2}}} \frac{dx_i}{dt} = \gamma_u u_i$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{c^2}}}$$

$$U_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = \frac{dx_4}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma_u (ic) = \gamma_u u_4$$

$$U_\mu = \gamma_\mu (u_i, ic)$$



• 四维波矢量 平面电磁波的电场强度 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$

\mathbf{k} 和 ω 在洛仑兹变换下均是可变量

$$\phi = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 - \omega t$$

$$= k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + \left(i \frac{\omega}{c} \right) (ict)$$

四维波矢量

$x_\mu = (\vec{x}, ict)$ 为四维位移矢量 引入 $k_\mu = \left(\vec{k}, i \frac{\omega}{c} \right)$

$$\Phi = k_\mu x_\nu = k'_\mu x'_\nu = \Phi' \quad \text{洛仑兹标量}$$

$$a_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} k'_1 = \gamma(k_1 + i\beta k_4) = \left(k_1 - \frac{v}{c^2} \omega \right) / \sqrt{1 - v^2/c^2} \\ k'_2 = k_2 \\ k'_3 = k_3 \\ \omega' = \frac{\omega - k_1 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{array} \right.$$

$k'_\mu = a_{\mu\nu} k_\nu$

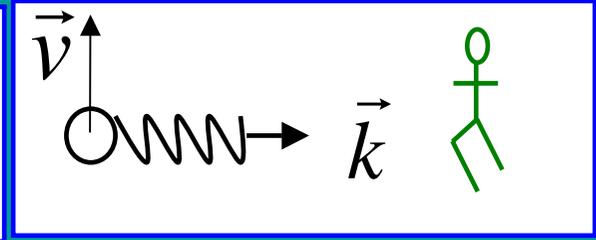
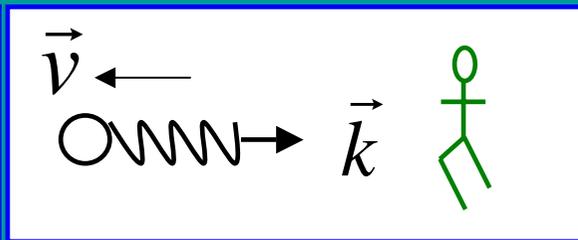
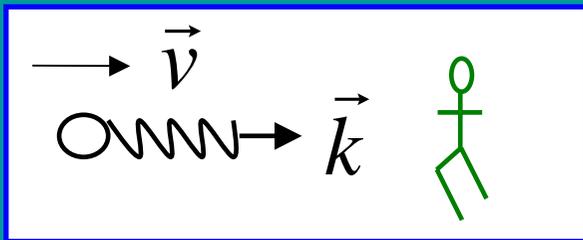


4. 多普勒效应

1) 经典的多普勒效应

光源的固有频率 ω_0 ，运动频率 ω

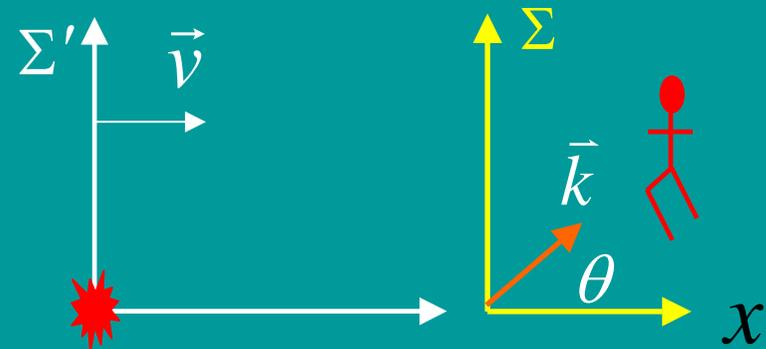
- 光源靠近观察者时： $\omega = \omega_0 / (1 - v/c)$ ($\omega > \omega_0$)
- 光源远离观察者时： $\omega = \omega_0 / (1 + v/c)$ ($\omega < \omega_0$)
- 光源垂直观察者运动时： $\omega = \omega_0$



2) 相对论多普勒效应

设光源相对于 Σ' 静止

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \cos \theta$$





$$\omega' = \frac{\omega - k_1 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \rightarrow \quad \omega' = \omega \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)$$

Σ' 系为静止参考系，则光源的固有频率 $\omega' = \omega_0$

Σ 系上观察到的光源角频率

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)}$$

光源靠近观察者 $\theta = 0$

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c} \omega_0 = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \omega_0 \quad (\omega > \omega_0)$$

光源远离观察者 $\theta = \pi$

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c} \omega_0 = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \omega_0 \quad (\omega < \omega_0) \quad \text{红移}$$

光源垂直观察者运动 $\theta = \pi/2$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} < \omega_0$$

横向多普勒效应



三. 物理规律的协变性

协变性：在参考系变换下方程形式不变的性质

$$F'_{\mu} = a_{\mu\nu} F_{\nu} = G_{\nu} a_{\mu\nu} = G'_{\mu}$$

检验物理规律是否是协变的，最一般的方法是将描述物理规律的方程化为四维形式，相应物理量转化为四维协变量，如果能够实现这种转化，则描述物理规律的方程一定是协变的



作业：7，11