电动力学试题

一、判断概念是否正确，若不正确，请写出正确答案（共15分，每小题3分）

1、磁场强度$\vec{H}$是个辅助物理量,它与磁感应强度$\vec{B}$的普遍关系为：

$\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$.　　（ × ）

2、静电场总能量可表示为$W=\frac{1}{2}\int\rho\varphi\,dV$，则其能量密度为$w=\frac{1}{2}\rho\varphi$。　　（ × ）

3、在研究辐射问题时，我们用小区域展开，所谓小区域是指它的线度l，波长为λ，以及观察点与源点距离r之间满足关系：$l,\lambda<<r$.　　（ × ）

4、电场与引力场一样是保守场，即电场是无旋场。　　（ √ ）

5、在导体表面上，电力线总是与界面正交，磁力线与界面相切。　　（ × ）

二、简答题（共15分，每小题5分）

1、由麦克斯韦方程组出发，分析产生电场的方式有几种？为什么？

在麦克斯韦电磁场理论中，自由电荷可激发电场 ，变化磁场也可激发电场。

2、当您用收音机接收信号时，感觉与无线电方向有关，这是为什么？

因为收音机接收信号的天线（天线杆、线圈和磁棒）具有方向性，在不同方向的增益或者说灵敏度不一样，所以与无线电波的来波方向有关。

3、在稳恒电流情况下，有没有磁场存在？若有磁场存在，磁场满足什么方程？电场满足什么方程？

在稳恒电流情况下，有磁场存在。

稳恒电流产生的磁场满足方程：

$$B=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}_0}{r^2}$$。

电场满足$\vec{J}=\sigma\vec{E}$，$I=\int_S\vec{J}\cdot d\vec{S}$

三、证明题（共15分，每小题15分）

1、多普勒效应被广泛应用，请你利用洛伦兹变换证明运动光源辐射角频率ω与它的

静止角频率ω_0的关系为：$\omega = \dfrac{\omega_0}{\gamma\left(1-\dfrac{v}{c}\cos\theta\right)}$，其中$\gamma = (\sqrt{1-v^2/c^2})^{-1}$；$v$为光源运动速度。

设运动光源的波矢为$\vec{k}$，静止光源的波矢为$\vec{k}'$

光源的相位不随参考系而变，

$\phi = \vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t = \vec{k}'\cdot\vec{x}' - \omega_0 t'$

$k'_\mu x'_\mu = k_\mu x_\mu =$常数

可得$k_\mu = \left(\vec{k}, i\dfrac{\omega}{c}\right)$

根据洛伦兹变换有

$$\begin{cases} k_1' = \gamma\left(k_1 - \dfrac{v}{c^2}\omega\right) \\ k_2' = k_2 \\ k_3' = k_3 \\ \omega_0 = \gamma\left(\omega - v k_1\right) \end{cases}$$

设设波矢量$\vec{k}$与x轴方向的夹角为θ，$\vec{k}'$与x轴方向的夹角为θ'

有$k_1 = \dfrac{\omega}{c}\cos\theta$，$k_1' = \dfrac{\omega'}{c}\cos\theta'$

可解出$\omega_0 = \omega\gamma\left(1-\dfrac{v}{c}\cos\theta\right)$即$\omega = \dfrac{\omega_0}{\gamma\left(1-\dfrac{v}{c}\cos\theta\right)}$

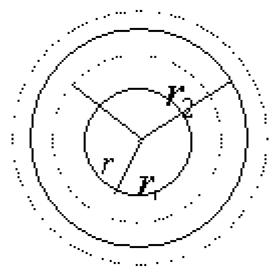
其中$\gamma = (\sqrt{1-v^2/c^2})^{-1}$

四、综合题（共55分，前三每题题15分，最后一题10分）

1、有一内外半径分别为r_1和r_2的空心介质球，介质的介电常数为ε，使介质内均匀带静止自由电荷ρ_f，求：(1)空间各点的电场；(2) 极化体电荷和极化面电荷分布。（15分）

解：由高斯定理

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int \rho_f dv \qquad (1)$$



1、 $r < r_1$ $\quad \vec{D} = 0 \quad \vec{E} = 0 \qquad (2)$

2、 $r_1 < r < r_2$ $\quad D4\pi r^2 = \rho_f \frac{4\pi}{3}(r^3 - r_1^3) \qquad \vec{D}_2 = \frac{\rho_f (r^3 - r_1^3)}{3r^3}\vec{r}$

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho_f (r^3 - r_1^3)}{3\varepsilon r^3}\vec{r} \qquad (3)$$

3、 $r > r_2$ $\quad D4\pi r^2 = \rho_f \frac{4\pi}{3}(r_2^3 - r_1^3)$

$$\vec{D}_3 = \frac{\rho_f (r_2^3 - r_1^3)}{3r^3}\vec{r} \qquad \vec{E}_3 = \frac{\rho_f (r_2^3 - r_1^3)}{3\varepsilon_0 r^3}\vec{r} \qquad (4)$$

而由 $\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P} \qquad (5)$

$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} \qquad (6)$

在 $r < r_1$ $\quad \rho_p = 0 \quad \vec{P}_1 = 0$

$r_1 < r < r_2$ $\quad \vec{P}_2 = (1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\vec{D}_2 \quad \rho_{P_2} = -\nabla\cdot\vec{P} = -(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\nabla\cdot\vec{D}_2 = -(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\rho_f$

$r > r_2$ $\quad \vec{P}_3 = 0 \quad \rho_{P_3} = 0$

在 $r = r_1$ 界面上，极化面电荷

$$\sigma_{p_1} = P_{2n} - P_{1n} = (1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\frac{\rho_f (r_1^3 - r_1^3)}{3r_1^2} = 0$$

在 $r=r_2$ 界面上，极化面电荷

$$\sigma_{p_2}=P_{2n}-P_{3n}=(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\frac{\rho_f(r_2^3-r_1^3)}{3r_2^2}$$

2、在均匀外电场中置入半径为 R_0 的接地导体球，求空间各点的电势和导体上电荷面密度。（分离变量法）

解：取 z 轴为 $\vec{E}_0$ 方向，球外势 φ 满足拉氏方程

$$\nabla^2\varphi=0$$

导体球接地， $\therefore \varphi_1=0\left(r\le R\right)$

由(1)得 $r>a$ 解为 $\varphi_2=\sum_n[a_n r^n P_n(\cos\theta)+\frac{b_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta)]$ (2)

当 $r\to\infty$ $\varphi_2=-E_0 r\cos\theta$ (3)

则得 $\varphi_2=-E_0 r\cos\theta+\sum_n\frac{b_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta)$ (4)

当 $r=R$， $\varphi_2=0$ (5)

得 $\varphi_2=-E_0 r\cos\theta+\frac{E_0R_0^3}{r^2}\cos\theta$ (6)

因此球内外电势为

$$\varphi=\begin{cases}0 & \left(r\le R\right)\\ -E_0 r\cos\theta+\frac{E_0R_0^3}{r^2}\cos\theta & \left(r>R\right)\end{cases}$$

则球面上感应电荷的面密度为：

$$\sigma=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R}=3\varepsilon_0E_0\cos\theta$$

3、内外半径分别为 r_1 和 r_2 的无穷长空心导体圆柱，沿轴向流有稳恒均匀自由电流 $\vec{j}_f$，导体的磁导率为 μ，求磁感应强度和磁化电流。

解：对于稳恒电流，安培环路定理为

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_f$$

当 $r<r_1$ 时，$I_f=0$，故 $\vec{H}=0,\ \vec{B}=0$。

当 $r_2>r>r_1$ 时，

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = 2\pi r H = \int_S \vec{J}_f\cdot d\vec{S} = J_f\pi(r^2-r_1^2)$$

$$\therefore\ \vec{B}=\mu\vec{H}=\frac{\mu(r^2-r_1^2)}{2r^2}\vec{J}_f\times\vec{r}$$

当 $r>r_2$ 时，$2\pi H=\pi J_f(r_2^2-r_1^2)$

$$\vec{B}=\mu_0\vec{H}=\frac{\mu_0(r_2{}^2-r_1^2)}{2r^2}\vec{J}_f\times\vec{r}$$

$$\vec{J}_M=\nabla\times\vec{M}=\nabla\times(\chi_M\vec{H})=\nabla\times\left(\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\vec{H}\right)=\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\vec{J}_f,\ (r_1<r<r_2)$$

磁化面电流，$\vec{\alpha}_M=\vec{n}\times(\vec{M}_2-\vec{M}_1)$，$\vec{n}$ 从介质1指向介质2。在内表面上，

$$M_1=0$$

$$M_2=\left(\mu/\mu_0-1\right)\frac{r^2-r_1^2}{2r^2}\bigg|_{r=r_1}=0$$

故 $\vec{\alpha}_M=\vec{n}\times\vec{M}_2=0,\ (r=r_1)$

在外表面上，当 $r=r_2$ 时，$\vec{M}_2=0$

$$\vec{M}_1=\chi_M\vec{H}=\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\frac{(r^2-r_1^2)}{2r^2}\vec{J}_f\times\vec{r}$$

$$\vec{\alpha}_M=\vec{n}\times(-\vec{M}_1)=-\vec{n}\times\vec{M}_1\Big|_{r=r_2}=-\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\frac{r_2^2-r_1^2}{2r_2}\vec{J}_f$$

4、介电常数为 ε 的均匀介质中有均匀场强 $\vec{E}_0$，求介质中球形空腔内的电势和电场。

（分离变量法）

解： 场强设为 $\vec{E}_0$，选择方向 $\vec{E}_0$ 为 z 轴方向，球腔内外均满足方程

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{1}$$

解为 $r < a$ $\quad \varphi_1 = \sum_n [a_n r^n P_n(\cos\theta) + \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)]$ (2)

$r > a$ $\quad \varphi_2 = \sum_n [c_n r^n P_n(\cos\theta) + \frac{d_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)]$

当 $r \to \infty$ $\quad \varphi_2 \to -E_0 r\cos\theta$ $\quad \therefore \quad c_n = 0 \quad n \neq 1 \quad c_1 = -E_0$

$$\varphi_2 = -E_0 r\cos\theta + \sum_n \frac{d_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) \tag{3}$$

当 $r \to 0$ $\quad \varphi_1$ 有限。 $\therefore \quad b_n = 0 \qquad \varphi_1 = \sum_n a_n r^n P_n(\cos\theta)$ (4)

在 $r = R_0$ 界面上有

$$\varphi_1 = \varphi_2\Big|_{r=R_0} \qquad \varepsilon_0 \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=R_0} \tag{5}$$

因此有

$$-E_0 R_0\cos\theta + \sum_n \frac{d_n}{R_0^{n+1}} P_n(\cos\theta) = \sum_n a_n R_0^n P_n(\cos\theta)$$

$$\varepsilon[-E_0\cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)d_n}{R_0^{n+2}} P_n(\cos\theta)] = \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty}[n a_n R_0^{n-1} P_n(\cos\theta)]$$

比较系数得

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{d_0}{R_0} \\ d_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -E_0 R_0 + \dfrac{d_1}{R_0^2} = a_1 R_0 \\ \varepsilon(-E_0 - \dfrac{2d_1}{R_0^3}) = \varepsilon_0 a_1 \end{cases}$$

解得 $a_0 = 0$， $d_0 = 0$， $a_n = 0$， $d_n = 0 \quad (n \neq 0,1)$

$$a_1 = \frac{-3\varepsilon E_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0} \qquad d_1 = \frac{\varepsilon_0 E_0 R_0^2}{2\varepsilon + \varepsilon_0} \tag{6}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{-3\varepsilon E_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0} r\cos\theta \\ \varphi_2 = -E_0 r\cos\theta + \dfrac{(\varepsilon_0 - \varepsilon)E_0 R_0^3}{(2\varepsilon + \varepsilon_0)r^2}\cos\theta \end{cases} \tag{7}$$