

## 三参数区间灰数信息下的动态多属性决策方法

王霞, 党耀国

(南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 211106)

**摘要:** 针对方案属性值为三参数区间灰数的动态多属性决策问题, 提出一种基于前景理论的动态多属性决策方法. 定义了三个参数区间灰数距离测度和排序方法; 鉴于被评价对象在时序上的差异信息和波动性, 建立基于方差和时间度的确定时间权重的优化模型; 以两两方案互为参考点确定前景价值函数, 由此构建求解最优权向量的优化模型, 并通过求解方案的综合前景值对方案进行排序. 实例研究表明了该方法的合理性和有效性.

**关键词:** 三参数区间灰数; 时间度; 前景理论; 前景价值函数

中图分类号: N945

文献标志码: A

## Dynamic multi-attribute decision-making methods with three-parameter interval grey number

WANG Xia, DANG Yao-guo

(College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China. Correspondent: WANG Xia, E-mail: wangxia0509@163.com)

**Abstract:** For dynamic multi-attribute decision-making problems, in which the attribute value of alternatives is three-parameter interval grey number, a dynamic multi-attribute decision making method based on the prospect theory is proposed. The distance measure and ranking method of three-parameters interval grey numbers is defined in view of differences and volatility of the evaluation objects in the timing, an optimized model based on the variance and time degree is built to determine the time weight. The prospect value function is determined with reference to each other alternatives, and a multi-index optimization model can be built to solve the optimum weight vector, and the alternatives are ranked based on integrated prospect values. An example is presented to illustrate the usefulness and effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** three-parameter interval grey number; time degree; prospect theory; prospect value function

### 0 引言

在实际决策问题中, 多属性决策问题<sup>[1]</sup>一直是人们关注的重点. 由于客观事物本身的复杂性和不确定性, 决策者无法给出效果测度的具体数值. 区间灰数<sup>[2]</sup>作为处理多属性不确定性决策问题的一种手段, 自邓聚龙教授提出以来受到了众多学者的关注. 然而, 区间灰数通常只取区间的上限和下限, 且上限与下限间各个数取值机会被认为是相等的, 在综合各方案的效果评价价值时, 计算结果往往会进一步扩大区间灰数的取值范围, 从而产生较大的误差. 文献[3]针对区间灰数的不足, 引入了三参数区间灰数, 将多属性决策拓展到决策信息为三参数区间灰数的情况; 文献

[4]定义了三个参数区间灰数与实数比较的相对优势度的概念, 提出了一种基于相对优势度的三个参数区间灰数的排序方法; 文献[5]对三个参数区间灰数的性质进行了探讨, 由此建立了基于三个参数区间灰数的灰靶决策模型; 文献[6]针对属性值为三个参数区间灰数的情况, 构建了三类灰靶决策模型.

传统的多属性决策只考虑单个时点的决策信息, 往往难以满足实际问题的需要. 随着时间的发展和数据的积累, 需要对评价对象一段时间的情况进行综合考察, 即动态多属性决策. 文献[7]针对决策信息不完全的动态多属性决策问题, 将决策问题转化为各方案的广义优序数矩阵问题; 文献[8]把累积前景理论

收稿日期: 2014-05-16; 修回日期: 2014-08-20.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71071077, 71371098); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(NC2012001); 江苏省高校哲学社会科学重点研究基金重大项目(2012JDXM005); 江苏省普通高校研究生科研创新计划项目(CXZZ13.0183).

作者简介: 王霞(1985—), 女, 博士生, 从事灰色系统理论、决策分析的研究; 党耀国(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论、数量经济等研究.

应用到属性值为实数型的动态风险型决策问题. 根据“新信息优先原理”: 新信息对认知的作用大于老信息, 由此可知, 不同时间点的信息对决策结果的合理性具有一定的影响, 因此, 如何确定不同时间点的权重是将动态决策表转化为静态决策表的关键. 文献[9-10]都是由专家给出时间点的权重, 具有一定的主观性; 文献[7]根据广义优序数矩阵得到各时间序列的贴近度, 由此确定时间序列的权重; 文献[11]针对多属性决策的不确定性和多时点性, 提出了基于灰熵和时间度建立时点权重的求解模型.

在众多的多属性决策问题中, 决策者对方案主观上的风险偏好常常会影响最终的决策结果. 前景理论是 Kahneman 等<sup>[12]</sup>于 1979 年提出的, 该理论发现了理性决策研究中没有意识到的行为模式, 决策者认为个体通过将概率转化为决策权重函数, 可对不同结果分派非概率权重. 1982 年 Tversky 等<sup>[13]</sup>又提出了累积前景理论, 该理论能更准确地反映决策者面临损失时是风险偏好的, 即高估小概率事件; 面临收益时是厌恶风险的, 即低估发生概率较大事件的心理特征. 文献[14]定义了一种基于区间直觉模糊数的价值函数, 提出了一种基于前景理论的区间直觉模糊数多属性决策方法. 文献[15]把 MYCIN 不确定因子方法与前景理论相融合, 提出了一种新的基于证据推理的随机决策方法. 文献[16]基于累积前景理论提出了一种解决应急响应风险多属性决策方法. 文献[17]以各属性的期望值作为参考点, 建立了 4 种各方案相对于期望值的收益和损失的计算方法, 提出了一种基于前景理论的多属性决策方法.

综上所述, 现有研究存在如下问题: 1) 现有的三参数区间灰数的距离测度和排序方法没有体现三参数区间灰数取值的本质特点; 2) 现有的动态决策问题关于时间权重的确定, 一方面大都由决策者直接给出时间的权重, 具有一定的主观性, 另一面没有考虑被评价对象在时序上的差异信息; 3) 现有的前景价值函数大都是以固定点为参考点, 不能更好地反映该方案相对于其他方案时的收益和损失. 本文在此基础上, 针对属性值为三参数区间灰数的动态多属性决策问题, 首先定义三参数区间灰数的距离测度和排序方法; 利用方差和时间度建立确定时间权重的优化模型; 构建以两两方案互为参考点的求解属性权重的多目标优化模型; 最后根据综合前景值的大小对方案进行排序. 实例分析表明了该模型的有效性和可行性.

## 1 基本知识

在实际问题中, 把只知道取值范围而不知其确切值的数称为灰数, 即灰数实际上是指在某一个区间或某个一般的数集内取值不确定的实数, 通常用符号

“ $\otimes$ ”表示. 然而在用区间灰数表示决策信息时, 为了获取所有信息, 往往将区间范围取得过大, 这会使决策结果的不确定性增大. 考虑到区间灰数的不足, 文献[3]引入了三参数区间灰数.

**定义 1<sup>[3]</sup>** 既有上界  $\bar{a}$  又有下界  $\underline{a}$  的灰数称为区间灰数, 记作  $a(\otimes) \in [\underline{a}, \bar{a}]$ , 且  $\underline{a} \leq \bar{a}$ ; 若区间灰数取值可能性最大的数已知, 即区间灰数可表示为  $a(\otimes) \in [\underline{a}, \tilde{a}, \bar{a}]$ , 则称之为三参数区间灰数, 其中  $\tilde{a}$  是  $a(\otimes)$  取值可能性最大的数, 称为重心.

由三参数区间灰数的定义可知, 类似于区间灰数的运算性质<sup>[2]</sup>, 可定义三参数区间灰数的运算. 例如, 设  $a(\otimes) \in [\underline{a}, \tilde{a}, \bar{a}]$ ,  $b(\otimes) \in [\underline{b}, \tilde{b}, \bar{b}]$  为三参数区间灰数, 则有

$$a(\otimes) + b(\otimes) \in [\underline{a} + \underline{b}, \tilde{a} + \tilde{b}, \bar{a} + \bar{b}],$$

$$a(\otimes)/b(\otimes) \in [\min\{\underline{a}/\underline{b}, \underline{a}/\bar{b}, \bar{a}/\underline{b}, \bar{a}/\bar{b}\}, \tilde{a}/\tilde{b}, \max\{\underline{a}/\underline{b}, \underline{a}/\bar{b}, \bar{a}/\underline{b}, \bar{a}/\bar{b}\}].$$

通常情况下, 三参数区间灰数  $a(\otimes)$  的取值可能性由最可能取值点  $\tilde{a}$  向上界  $\bar{a}$  和下界  $\underline{a}$  逐渐递减, 如图 1 所示.

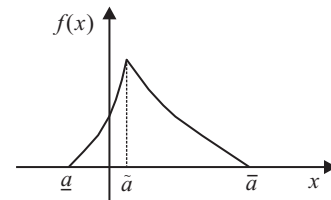


图 1 三参数区间灰数

图 1 中,  $f(x)$  表示区间内某一点取值的概率. 文献[18]指出, 取值可能性最大的点对应的分布概率为  $f(\tilde{a}) \geq \delta$ , 其中  $\delta$  为一个常数, 只有当  $\delta$  达到一定程度时, 才能称之为最可能值. 一般情况下取  $\delta \geq 60\%$ ; 若  $\delta < 60\%$ , 则说明决策有误, 决策者需要重新审视问题并对判断作出相应调整.

三参数区间灰数的距离测度及排序, 是研究评价信息为三参数区间灰数问题的关键. 在已有的文献中, 两三参数区间灰数间的距离都是依据欧氏空间中距离的表达式, 仅考虑对应端点之间的距离, 而忽略了三参数区间灰数取值的特点. 本文考虑到三参数区间灰数重心点的特殊性, 以及取值范围对其取值不确定性的影响, 给出两三参数区间灰数的距离测度及排序方法.

**定义 2** 设  $a(\otimes) \in [\underline{a}, \tilde{a}, \bar{a}]$  和  $b(\otimes) \in [\underline{b}, \tilde{b}, \bar{b}]$  为两个三参数区间灰数, 则

$$d(a(\otimes), b(\otimes)) = \sqrt{\frac{2}{3}(\tilde{a} - \tilde{b})^2 + \frac{1}{3}(\gamma(\underline{a} - \underline{b})^2 + (1 - \gamma)(\bar{a} - \bar{b})^2)} \quad (1)$$

是三参数区间灰数  $a(\otimes)$  与  $b(\otimes)$  的距离, 其中  $\gamma$  为决策者的风险态度系数且  $\gamma \in [0, 1]$ . 当  $\gamma > 0.5$  时, 表示决策者为风险规避者, 即决策者更倾向于用区间的左端点来衡量二者之间的距离; 当  $\gamma < 0.5$  时, 表示决策者为风险爱好者, 即决策者更倾向于用区间的右端点来衡量二者之间的距离; 当  $\gamma = 0.5$  时, 表示决策者为风险中立者, 即决策者综合考虑区间的左右端点来衡量二者之间的距离.

**定理 1** 设  $a(\otimes) \in [a, \bar{a}, \bar{a}]$  和  $b(\otimes) \in [\underline{b}, \tilde{b}, \bar{b}]$  为两个三参数区间灰数,  $d(a(\otimes), b(\otimes))$  为  $a(\otimes)$  与  $b(\otimes)$  的距离, 则有如下性质:

- 1)  $d(a(\otimes), b(\otimes)) \geq 0$ , 当且仅当  $\underline{a} = \bar{a} = \bar{a}$ ,  $\underline{b} = \bar{b} = \bar{b}$  时  $d(a(\otimes), b(\otimes)) = 0$ ;
- 2)  $d(a(\otimes), b(\otimes)) = d(b(\otimes), a(\otimes))$ ;
- 3) 对于任一三参数区间灰数  $c(\otimes) \in [\underline{c}, \tilde{c}, \bar{c}]$ , 有  $d(a(\otimes), b(\otimes)) \leq d(a(\otimes), c(\otimes)) + d(c(\otimes), b(\otimes))$ .

**证明** 性质 1) 和性质 2) 显然. 下面仅证性质 3).

设  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)$  为两个三维空间向量, 由柯西不等式得到

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 (x_i + y_i)^2 = \\ & \sum_{i=1}^3 x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^3 x_i y_i + \sum_{i=1}^3 y_i^2 \leq \\ & \sum_{i=1}^3 x_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^3 y_i^2} + \sum_{i=1}^3 y_i^2 = \\ & \left( \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^3 y_i^2} \right)^2. \end{aligned} \tag{2}$$

令  $c(\otimes) \in [\underline{c}, \tilde{c}, \bar{c}]$ , 且

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{3}\gamma}{3}(\underline{a} - \underline{c}), \quad x_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}(\bar{a} - \tilde{c}), \\ x_3 &= \frac{\sqrt{3}(1-\gamma)}{3}(\bar{a} - \bar{c}), \quad y_1 = \frac{\sqrt{3}\gamma}{3}(\underline{c} - \underline{b}), \\ y_2 &= \frac{\sqrt{6}}{3}(\tilde{c} - \tilde{b}), \quad y_3 = \frac{\sqrt{3}(1-\gamma)}{3}(\bar{c} - \bar{b}), \end{aligned}$$

代入不等式 (2), 则有

$$d(a(\otimes), b(\otimes)) \leq d(a(\otimes), c(\otimes)) + d(c(\otimes), b(\otimes)). \quad \square$$

**定义 3** 设  $a(\otimes) \in [a, \bar{a}, \bar{a}]$  和  $b(\otimes) \in [\underline{b}, \tilde{b}, \bar{b}]$  为两个三参数区间灰数, 当

$$\bar{a} + \frac{\bar{a} + a}{2} > \tilde{b} + \frac{\bar{b} + b}{2} \tag{3}$$

时, 称  $a(\otimes) > b(\otimes)$ .

## 2 决策方法

设某一多属性决策问题, 其方案集合为  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , 属性因素集合为  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ , 相

应的属性权重为  $\omega_j$  并满足  $\xi_j \leq \omega_j \leq \zeta_j$ ,  $\xi_j \leq \zeta_j$  且  $\xi_j, \zeta_j \in [0, 1]$ ,  $\sum_{j=1}^m \omega_j = 1$ .  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_h\}$  是对可行性方案所考察的时间序列, 相应的时间权重为  $\lambda_l$  且满足  $\sum_{l=1}^h \lambda_l = 0$ .  $u_{ij}^l$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ ;  $l = 1, 2, \dots, h$ ) 为方案  $a_i$  在时间  $t_l$  下关于属性  $b_j$  的效果样本值, 该效果样本值是一个三参数区间灰数, 记为  $u_{ij}^l(\otimes) \in [\underline{u}_{ij}^l, \tilde{u}_{ij}^l, \bar{u}_{ij}^l]$  ( $0 \leq \underline{u}_{ij}^l \leq \tilde{u}_{ij}^l \leq \bar{u}_{ij}^l$ ), 则可得时间  $t_l$  下的决策矩阵为  $U^l = (u_{ij}^l(\otimes))_{n \times m}$ .

为了消除量纲和增加可比性, 引入如下灰色极差变换:

对于效益型目标值, 有

$$r_{ij}^l = \frac{\underline{u}_{ij}^l - \underline{u}_j^{l\nabla}}{\underline{u}_j^{l*} - \underline{u}_j^{l\nabla}}, \quad \tilde{r}_{ij}^l = \frac{\tilde{u}_{ij}^l - \underline{u}_j^{l\nabla}}{\underline{u}_j^{l*} - \underline{u}_j^{l\nabla}}, \quad \bar{r}_{ij}^l = \frac{\bar{u}_{ij}^l - \underline{u}_j^{l\nabla}}{\underline{u}_j^{l*} - \underline{u}_j^{l\nabla}};$$

对于成本型目标值, 有

$$r_{ij}^l = \frac{\bar{u}_j^{l*} - \bar{u}_{ij}^l}{\bar{u}_j^{l*} - \underline{u}_j^{l\nabla}}, \quad \tilde{r}_{ij}^l = \frac{\bar{u}_j^{l*} - \tilde{u}_{ij}^l}{\bar{u}_j^{l*} - \underline{u}_j^{l\nabla}}, \quad \bar{r}_{ij}^l = \frac{\bar{u}_j^{l*} - \underline{u}_{ij}^l}{\bar{u}_j^{l*} - \underline{u}_j^{l\nabla}}.$$

其中:  $\bar{u}_j^{l*} = \max_{1 \leq i \leq n} \{\bar{u}_{ij}^l\}$ ,  $\underline{u}_j^{l\nabla} = \min_{1 \leq i \leq n} \{\underline{u}_{ij}^l\}$ . 则  $r_{ij}^l(\otimes) \in (r_{ij}^l, \tilde{r}_{ij}^l, \bar{r}_{ij}^l)$  为  $[0, 1]$  上的三参数区间灰数, 因此, 可得时间  $t_l$  下规范化的决策矩阵  $R^l = (r_{ij}^l(\otimes))$ .

### 2.1 时间权重的确定

对于动态决策问题, 为了得到合理的评价结果, 如何科学地确定时间样本点的权重是重点. 时间权重是对不同时刻的重视程度的体现. 根据灰色系统理论的“新信息优先原理”, 新信息对认知的作用大于老信息, 即时点越近证据信息将越丰富, 对决策判断越有效. 由于信息不完全的决策系统具有一定的波动性, 确定时点权重应使权重序列的波动性尽量减少, 本文采用方差与时间度相结合的方法来确定时间点的权重.

**定义 4**<sup>[19]</sup> 若  $\tau = \sum_{l=1}^h \frac{h-l}{h-1} \lambda_l$ , 则称  $\tau$  为时间度.

特别地, 当  $W = (1, 0, \dots, 0)$  时,  $\tau = 1$ ; 当  $W = (0, 0, \dots, 1)$  时,  $\tau = 0$ ; 当  $W = (\frac{1}{h}, \frac{1}{h}, \dots, \frac{1}{h})$  时,  $\tau = 0.5$ .

时间度  $\tau$  的大小反映了决策者对时序的偏好程度,  $\tau$  越大, 反映评价者越重视远期时间点的数据;  $\tau$  越小, 反映评价者越重视近期时间点的数据. 时间度的标度参考如表 1 所示.

依据事先给定的时间度  $\tau$ , 充分挖掘样本的信息, 同时考虑被评价对象在时序上的差异信息, 以寻找一组最稳定的时间权重系数来集结样本值, 使其波动性最小.

在时间  $t_l$  下, 考虑被评价对象在时序上的差异信

表 1 时间度  $\tau$  的标度参考表

标度赋值	含义
0.1	非常重视近期数据
0.3	较重视近期数据
0.5	同等重视所有时期数据
0.7	较重视远期数据
0.9	非常重视远期数据
0.2, 0.4, 0.6, 0.8	表示上述判断的中间值

息, 记

$$d_l = \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n \sum_{j=1}^m d(r_{ij}^l(\otimes), r_{kj}^l(\otimes)) \quad (4)$$

为时间  $t_l$  下各方案两两之间的距离和; 同时考虑时间权重的波动性可以用方差来衡量, 则记

$$D^2(d_l \lambda_l) = \sum_{l=1}^h [(d_l \lambda_l - E(d_l \lambda_l))]^2 = \frac{1}{h} \sum_{l=1}^h (d_l \lambda_l)^2 - \frac{1}{h^2} \left( \sum_{l=1}^h d_l \lambda_l \right)^2, \quad (5)$$

其中  $E(d_l \lambda_l) = \frac{1}{h} \sum_{l=1}^h d_l \lambda_l$ . 为了寻找一组最稳定的时间权重系数来集结样本值, 可以建立优化模型

$$M_1: \min Z = D^2(d_l \lambda_l). \quad (6)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \tau = \sum_{l=1}^h \frac{h-l}{h-1} \lambda_l; \\ \sum_{l=1}^h \lambda_l = 1, \lambda_l \in [0, 1], l = 1, 2, \dots, h. \end{cases}$$

根据给定的时间度  $\tau$  求解该模型, 得到时间点的权重向量.

由求解的时间点权重模型  $M_1$ , 可以得到静态下的决策矩阵  $Z = [z_{ij}]_{n \times m}$ , 其中  $z_{ij} = \sum_{l=1}^h r_{ij}^l(\otimes) \lambda_l$ .

### 2.2 属性权重的确定及方案的排序

前景价值由价值函数和决策权重共同决定, 即

$$V = \sum_{i=1}^n \pi(p_i) v(y_i). \quad (7)$$

其中:  $V$  为前景价值;  $\pi(p)$  为决策权重, 是概率评价性的单调增函数;  $v(y)$  为价值函数, 是决策者主观感受形成的价值<sup>[12]</sup>.

在前景理论中, 当决策者面临风险时, 将根据已选取的参考点来衡量预期与结果的差距, 从而判断决策的收益和损失. 对于参考点的选取, 目前的研究主要是选取正负理想方案、零点或期望值这些固定点. 对于固定的参考点而言, 每一方案要么是收益, 要么是损失. 第三代前景理论<sup>[20]</sup>指出参考点实际上是可以变化的, 当参考点变化时, 每一方案相对于参考方案

可能面临的是收益, 也可能面临损失, 故前景值是收益和损失的综合值, 这样的结果更能说明方案的收益和损失. 基于此观点, 对于方案  $a_i$ , 本文以其他备选方案作为参考点, 得到如下的前景价值函数:

$$v(z_{ijk}) = \begin{cases} (d(z_{ij}(\otimes), z_{kj}(\otimes)))^\alpha, & z_{ij}(\otimes) \geq z_{kj}(\otimes); \\ -\theta(d(z_{ij}(\otimes), z_{kj}(\otimes)))^\beta, & z_{ij}(\otimes) < z_{kj}(\otimes). \end{cases} \quad (8)$$

其中: 参数  $\alpha$  和  $\beta$  分别表示收益和损失区域价值幂函数的凹凸程度,  $\alpha, \beta < 1$  表示敏感性递减; 系数  $\theta$  表示损失区域比收益区域更陡的特征,  $\theta > 1$  表示损失厌恶<sup>[12]</sup>.

根据文献 [12] 给出的前景权重函数, 设决策者面临收益和损失时的前景权重函数分别为

$$\begin{aligned} \pi^+(\omega_j) &= \omega_j^\gamma / [\omega_j^\gamma + (1 - \omega_j)^\gamma]^{1/\gamma}, \\ \pi^-(\omega_j) &= \omega_j^\delta / [\omega_j^\delta + (1 - \omega_j)^\delta]^{1/\delta}. \end{aligned} \quad (9)$$

综上所述, 可得方案  $a_i$  在属性  $b_j$  下前景值为

$$V_{ij} = \sum_{k \neq i}^n v(z_{ijk}) \pi_{ijk}. \quad (10)$$

其中: 当  $z_{ij}(\otimes) \geq z_{kj}(\otimes)$  时,  $\pi_{ijk} = \pi^+(\omega_j)$ ; 当  $z_{ij}(\otimes) < z_{kj}(\otimes)$  时,  $\pi_{ijk} = \pi^-(\omega_j)$ . 从而, 方案  $a_i$  的综合前景值为

$$V_i = \sum_{j=1}^m V_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i \neq j}^n v(z_{ijk}) \pi_{ijk}. \quad (11)$$

根据文献 [12] 中前景价值函数的研究结果, 前景效用价值函数和前景权重函数中的参数取为  $\alpha = \beta = 0.88, \theta = 2.25, \gamma = 0.61, \delta = 0.69$ , 这些参数取值均是经实验数据验证的结论.

由于各方案是公平竞争的, 可以利用多目标规划方法构建优化模型. 对于每个方案  $a_i$  而言, 其综合前景值总是越大越好. 因此可以建立优化模型

$$M_2: \max V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m V_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{i \neq j}^n v(z_{ijk}) \pi_{ijk}. \quad (12)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^m \omega_j = 1, \omega_j \geq 0; \\ \xi_j \leq \omega \leq \zeta_j, \xi_j \leq \zeta_j \text{ 且 } \xi_j, \zeta_j \in [0, 1]. \end{cases}$$

求解上述模型  $M_2$ , 可以得到属性权重向量的最优解  $w^* = (w_1^*, w_2^*, \dots, w_s^*)$ .

### 3 实例分析

黄河是中国凌汛出现最为频繁的河流, 其中宁蒙段最为严重, 这是由于它的特殊的地理位置、河道特性、水文气象条件决定的. 冰凌灾害所造成的损失将会越来越大, 所以防凌工作已成为中国冬春季防汛工作的头等大事. 由于黄河上游流经黄土高原和沙漠边

缘,致使河水含沙迅速增大,河床抬升,河身由窄深逐渐变为宽浅,河道中浅滩弯道叠出,坡度变缓,解冻开河时,在河道的曲湾或由宽到窄的狭窄段,容易出现卡冰结坝现象。

本文根据河流封冻前的流凌的情况来判断巴彦高勒、三湖河口、头道拐3个河段可能发生凌汛,提前

做好防汛准备.从各水文站可以获取2008~2012年巴彦高勒、三湖河口、头道拐3个河段的相关属性的数据,如表2~表4所示.决策者给出的不完全权重信息为:  $0.1 \leq \omega_1 \leq 0.24$ ,  $0.1 \leq \omega_2 \leq 0.3$ ,  $0.15 \leq \omega_3 \leq 0.27$ ,  $0.1 \leq \omega_4 \leq 0.2$ , 试确定哪个地段更容易发生卡冰结坝现象.本文中实数可视作特殊的三参数区间灰数.

表2 巴彦高勒流凌属性数据

年份	水位/m	流量/(m <sup>3</sup> /s)	气温/°C	流凌天数/天
2008	[50.96, 51.81, 52.85]	[580, 600, 620]	[-5.0, -1.5, 1.5]	17
2009	[50.77, 50.98, 51.08]	[465, 470, 515]	[-3.9, -0.7, 2.1]	9
2010	[51.05, 51.22, 51.39]	[495, 535, 620]	[-4.3, -1.0, 2.3]	12
2011	[51.15, 51.49, 51.82]	[600, 619, 648]	[-4.5, -1.2, 1.7]	38
2012	[51.64, 51.81, 52.08]	[610, 615, 620]	[-3.4, -0.3, 2.8]	14

表3 三湖河口流凌属性数据

年份	水位/m	流量/(m <sup>3</sup> /s)	气温/°C	流凌天数/天
2008	[17.27, 18.25, 19.12]	[525, 722.50, 620]	[-5.7, -1.9, 1.1]	29
2009	[17.44, 17.89, 18.55]	[528, 575, 640]	[-4.8, -1.1, 2.5]	15
2010	[17.87, 18.07, 18.26]	[315, 330, 380]	[-5.1, -1.3, 2.3]	5
2011	[18.47, 19.47, 20.46]	[490, 512.50, 535]	[-5.2, -1.5, 2.0]	25
2012	[18.34, 18.63, 19.06]	[310, 505, 810]	[-4.4, -1.0, 1.9]	18

表4 头道拐流凌属性数据

年份	水位/m	流量/(m <sup>3</sup> /s)	气温/°C	流凌天数/天
2008	[87.31, 87.37, 87.42]	[610, 650, 690]	[-5.9, -1.9, 0.9]	6
2009	[86.41, 86.70, 86.98]	[320, 540, 670]	[-5.5, -1.7, 2.7]	11
2010	[85.93, 86.49, 87.05]	[170, 290, 500]	[-5.6, -1.8, 2.2]	23
2011	[86.15, 87.09, 87.83]	[280, 487, 815]	[-5.6, -1.9, 1.8]	43
2012	[87.27, 87.42, 87.56]	[590, 710, 750]	[-5.4, -1.5, 2.5]	17

首先,对利用灰色极差变换对原始数据进行规范化处理,得到规范化后的决策矩阵  $R^l = (r_{ij}^l)$ .

由式(4)计算在不同时间段下,所有属性下两两方案的距离和为

$$d_1 = 3.7106, d_2 = 2.444, d_3 = 2.2751, \\ d_4 = 2.4919, d_5 = 2.6395,$$

其中  $\gamma = 0.5$ .再由式(5)根据给定的时间度  $\tau$ ,建立时间点权重的优化模型.实例中共有5年的数据,即  $p = 5$ ,决策者根据自己的知识经验和实地考察,经过决策者决议时间度取值为0.3,则可建立求解时点权重模型  $M_1$  如下:

$$\min Z = ((3.7106\lambda_1)^2 + (2.444\lambda_2)^2 + (2.2751\lambda_3)^3 + \\ (2.4919\lambda_4)^2 + (2.6395\lambda_5)^2)/5 - \\ ((3.7106\lambda_1 + 2.444\lambda_2 + 2.2751\lambda_3 + \\ 2.4919\lambda_4 + 2.6395\lambda_5)^2)/25.$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \lambda_1 + \frac{3}{5}\lambda_2 + \frac{2}{5}\lambda_3 + \frac{1}{5}\lambda_4 = 0.3; \\ \sum_{l=1}^5 \lambda_l = 1, \lambda_l \in [0, 1], l = 1, 2, \dots, 5. \end{cases}$$

求解上述模型,得到5个时间段的权重为

$$\lambda_1 = 0.0645, \lambda_2 = 0.1541, \lambda_3 = 0.2268, \\ \lambda_4 = 0.2617, \lambda_5 = 0.2929.$$

由这些时间权重可以得到静态下的决策矩阵为

$$Z = \begin{bmatrix} [0.2067, 0.3339, 0.4717] \\ [0.2476, 0.4119, 0.5957] \rightarrow \\ [0.3227, 0.5677, 0.7824] \\ [0.5937, 0.7070, 0.9428] \\ \leftarrow [0.1914, 0.3642, 0.5841] \rightarrow \\ [0.3152, 0.5524, 0.8126] \\ [0.1189, 0.5342, 0.9239] \quad 0.6465 \\ \leftarrow [0.0959, 0.5399, 0.9461] \quad 0.4945 \\ [0.0412, 0.4849, 0.9391] \quad 0.5262 \end{bmatrix}.$$

根据定义3中三参数区间灰数大小比较公式,对每一方案的效果值 $z_{ij}(\otimes)$ 与其他方案的效果值 $z_{kj}(\otimes)$ 进行比较,由式(8)得到其前景价值函数 $v(z_{ijk})$ ;根据 $z_{ij}(\otimes) \geq z_{kj}(\otimes)$ 时 $\pi_{ijk} = \pi^+(\omega_j)$ , $z_{ij}(\otimes) < z_{kj}(\otimes)$ 时 $\pi_{ijk} = \pi^-(\omega_j)$ ,由式(11)即可求得各方案的综合前景值.

对于每个方案 $a_i$ 而言,其综合前景值总是越大越好,因此可以建立优化模型 $M_2$ 如下:

$$\begin{aligned} \max V = & 0.7666\pi^+(\omega_1) + 1.0241\pi^+(\omega_2) + \\ & 1.0254\pi^+(\omega_3) + 0.3926\pi^+(\omega_4) - \\ & 1.625\pi^-(\omega_1) - 2.4109\pi^-(\omega_2) - \\ & 0.5911\pi^-(\omega_3) - 0.8855\pi^-(\omega_4). \end{aligned}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 0.1 \leq \omega_1 \leq 0.24, 0.1 \leq \omega_2 \leq 0.3; \\ 0.15 \leq \omega_3 \leq 0.27, 0.1 \leq \omega_4 \leq 0.2; \\ \sum_{j=1}^4 \omega_j = 1, \omega_j \geq 0. \end{cases}$$

采用Lingo 9.0求解上述模型,得到最优权重效果向量为

$$\omega^* = (0.24, 0.29, 0.27, 0.20);$$

由式(11)求得各方案的综合前景值为

$$V_1 = 0.1372, V_2 = -0.6179, V_3 = -0.2001.$$

于是方案优劣排序为 $a_1 \succ a_3 \succ a_2$ ,即 $a_2$ 地段更容易发生卡冰结坝现象.

为了进一步说明本文方法的合理性,下面采用文献[2]中的灰靶决策方法对上述问题进行求解.不考虑时点的波动性,取各时点的权重均为 $\lambda = 0.2$ .运用层次分析方法求得各属性的权重为 $\omega = (0.34, 0.20, 0.29, 0.17)$ ,得到各方案的正靶心距为 $\varepsilon_1^+ = 0.1419$ , $\varepsilon_2^+ = 0.2784$ , $\varepsilon_3^+ = 0.1029$ .于是方案的优劣顺序为 $a_3 \succ a_1 \succ a_2$ .与本文的结果相比,方案 $a_1$ 和 $a_3$ 的顺序发生了变化.从表2~表4的数据看:头道拐某些年份的水流量比较小,不利于冰块的搬运,因此,综合表中所有数据方案 $a_1$ 应优于方案 $a_3$ ,即本文的方法更合理;三胡河口2008~2012年的水位与巴彦高勒和头道拐相比差距较大,由于水位低,在河床高、河身宽浅、坡度变缓的地方就不利于冰块的搬运,易于卡冰结坝,即方案 $a_2$ 最易发生灾害.冰凌洪水的发生没有规律可循,且带来危害性大,因此,应根据往年的流凌情况确定哪个地段更容易发生卡冰结坝现象,提前做好防洪工作.

由上述案例分析来看,针对考虑决策者风险态度的动态多属性决策问题,运用本文方法可以得到更加合理的结果.本文方法具有以下优点.

1) 本文提出的三参数区间灰数的距离测度和排序公式体现了三参数区间灰数取值的特点,并考虑了其取值的不确定性,更加符合灰数的本质思想,而且本文距离测度公式能体现决策者的风险态度.

2) 以往的动态决策问题,大多是由决策者主观给出时间段的权重,具有一定的主观性.文献[11]中时间权重确定方法也仅考虑时间权重的波动性,没有考虑被评价对象在时序上的差异信息.本文提出时间权重的确定方法不仅考虑了时间权重的波动性,而且考虑了被评价对象在时序上的差异信息,克服了决策者的主观性,在处理方式和实现效果上更为客观.

3) 在构建前景价值函数时,传统的方法大都是以正负理想方案或期望值这些固定点为参考点.本文根据第三代前景理论的思想,对于某一方案以其他方案为参考点,即两两方案互为参考点,则每一方案相对于参考方案可能面临的是收益,也可能面临损失,故前景值是收益和损失的综合值,这样的结果更能说明方案的收益和损失.另外,以综合前景值为目标建立确定属性权重的多目标优化模型,该模型从决策者非理性的心理角度出发,构建求解属性权重的定量模型,有效地实现了主观与客观的结合.

## 4 结论

本文针对决策信息为三参数区间灰数的情况,提出了一种基于前景理论的动态多属性决策方法.依据灰色系统理论的信息覆盖原理,定义了三个参数区间灰数的距离和排序方法,该定义更加符合三参数区间灰数的取值特点;鉴于时间权重的波动性同时考虑被评价对象在时序上的差异信息,建立了基于方差和时间度的确定时间权重的优化模型,克服了决策者直接给出时间权重的主观性;考虑决策者的风险态度对多属性决策的影响,以两两方案互为参考点构建了确定属性权重的优化模型;最终以综合前景值的大小对备选方案进行排序.该方法考虑了灰数取值的特点和决策者的心理风险因素,实现了主观与客观的有效结合,使结果更加符合实际问题.因此,本文所提出的方法对于考虑决策者风险态度的动态多属性决策问题,提供了一种更为合理的解决方法,且当三参数区间灰数退化为实数时,该方法也适用.

## 参考文献(References)

- [1] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 1-2.  
(Xu Z S. Uncertain multiple attribute decision making methods and application[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 1-2.)

- [2] 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 15-16.  
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G, et al. Grey system theory and its application[M]. Beijing: Science Press, 2010: 15-16.)
- [3] 罗党. 三参数区间灰数信息下的决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(1): 124-130.  
(Luo D. Decision-making methods with three-parameter interval grey number[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2009, 29(1): 124-130.)
- [4] 王洁方, 刘思峰. 三参数区间灰数排序及其在区间DEA效率评价中的应用[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(1): 106-109.  
(Wang J F, Liu S F. Method of ranking three parameters interval grey numbers and its application in interval DEA model[J]. Systems Engineering and Electronics, 2011, 33(1): 106-109.)
- [5] 宋捷. 灰色决策方法及应用研究[D]. 南京, 南京航空航天大学经济与管理学院, 2010.  
(Song J. Research on the methods of grey decision-making and its application[D]. Nanjing: College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautic and Astronautics, 2010.)
- [6] Dang Luo, Xia Wang. The multi-attribute grey target decision method for attribute value within three-parameter interval grey number[J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36(5): 1957-1963.
- [7] 张小芝, 朱传喜, 朱丽. 一种基于变权的动态多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2014, 29(3): 494-498.  
(Zhang X Z, Zhu C X, Zhu L. A method of dynamic multi-attribute decision making based on variable weight[J]. Control and Decision, 2014, 29(3): 494-498.)
- [8] Hu J H, Yang L. Dynamic stochastic multi-criteria decision making method based on cumulative prospect theory and set pair analysis[J]. Systems Engineering Procedia, 2011, 1(1): 432-439.
- [9] 苏志欣, 王理, 夏国平. 区间数动态多属性决策的VIKOR扩展方法[J]. 控制与决策, 2010, 25(6): 836-840.  
(Su Z X, Wang L, Xia G P. Extended VIKOR method for dynamic multi-attribute decision making with interval numbers[J]. Control and Decision, 2010, 25(6): 836-840.)
- [10] 闫书丽, 刘思峰, 方志耕, 等. 基于累积前景理论的动态风险灰靶决策方法[J]. 控制与决策, 2013, 28(11): 1655-1660.  
(Yan S L, Liu S F, Fang Z G, et al. Dynamic risk grey target decision making method based on cumulative prospect theory[J]. Control and Decision, 2013, 28(11): 1655-1660.)
- [11] 梁燕华, 郭鹏, 朱煜明, 等. 基于区间数的多时点多属性灰靶决策模型[J]. 控制与决策, 2012, 27(10): 1527-1530.  
(Liang Y H, Guo P, Zhu Y M, et al. Multi-period and multi-criteria decision making model of grey target based on interval number[J]. Control and Decision, 2012, 27(10): 1527-1530.)
- [12] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk[J]. Economica, 1979, 47(2): 263-291.
- [13] Tversky A, Kahneman D. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty[J]. J of Risk and Uncertainty, 1992, 5 (4) : 297-323.
- [14] Wang J Q, Li K J, Zhang H Y. Interval-valued intuitionistic fuzzy multi-criteria decision-making approach based on prospect score function[J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 27(3): 119-125.
- [15] 李鹏, 刘思峰, 朱建军. 基于MYCIN不确定因子和前景理论的随机直觉模糊决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(6): 1509-1515.  
(Li P, Liu S F, Zhu J J. Intuitionistic fuzzy stochastic multi-criteria decision-making methods based on MYCIN certainty factor and Prospect theory[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2013, 33(6): 1509-1515.)
- [16] Yang Liu, Zhi-Ping Fan, Yao Zhang. Risk decision analysis in emergency response: A method based on cumulative prospect theory[J]. Computers & Operations Research, 2014, 42(8): 75-82.
- [17] Zhi-Ping Fan, Xiao Zhang, Fa-Dong Chen, et al. Multiple attribute decision making considering aspiration-levels: A method based on prospect theory[J]. Computers & Industrial Engineering, 2013, 65(2): 341-350.
- [18] 朱建军, 宋传平, 刘思峰, 等. 一类三端点区间数判断矩阵的一致性及其权重研究[J]. 系统工程学报, 2008, 23(1): 22-27.  
(Zhu J J, Song C P, Liu S F, et al. Consistency and weight estimation of three-point interval number comparison matrix[J]. J of Systems Engineering, 2008, 23(1): 22-27.)
- [19] Yager R R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, 1988, 18(1): 183-190.
- [20] Ulrich Schmidt, Chris Starmer, Robert Sugden. Third-generation prospect theory[J]. J of Risk and Uncertainty, 2008, 36(8): 203-223.

(责任编辑: 李君玲)