

不确定切换线性系统状态和未知输入估计方法

杨俊起¹, 陈滢涛¹, 朱芳来², 卜旭辉¹

(1. 河南理工大学 电气工程与自动化学院, 河南 焦作 454000; 2. 同济大学 电子与信息工程学院, 上海 201804)

摘要: 针对具有未知输入的不确定切换线性系统, 在平均驻留时间切换下, 讨论其状态和未知输入估计方法. 通过等价变换解耦切换系统的未知输入, 以构造降维切换系统. 进而, 设计切换观测器实现对原系统的状态估计, 并求解具有线性矩阵不等式限制的最优化问题, 得到观测器存在的充分条件. 在基于函数微分数值解方法求得系统输出微分的基础上, 提出一种切换系统未知输入的估计方法. 最后通过一个数值实例验证了所提出方法的有效性.

关键词: 切换线性系统; 降维切换观测器; 平均驻留时间; 未知输入观测器

中图分类号: TP273

文献标志码: A

State and unknown input estimations for uncertain switched linear systems

YANG Jun-qi¹, CHEN Yan-tao¹, ZHU Fang-lai², BU Xu-hui¹

(1. College of Electrical Engineering and Automation, He'nan Polytechnic University, Jiaozuo 454000, China;

2. College of Electronics and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China. Correspondent: YANG Jun-qi, E-mail: yjq@hpu.edu.cn)

Abstract: This paper deals with the problems of both state estimation and unknown input reconstruction for a class of uncertain switched linear systems. A state equivalent transformation is considered to decouple the unknown inputs, and a reduced-order switched system is constructed. Then, a reduced-order switched observer is proposed such that the states of original switched system can be asymptotically estimated, and the sufficient conditions of switched observer design are provided by solving the feasibility of an optimization problem. A kind of method for unknown input estimation is given by using the some numerical approaches. Finally, the results of a numerical simulation show the effectiveness of the proposed method.

Keywords: switched linear system; reduced-order switched observer; average dwell time; unknown input observer

0 引言

切换系统是由一系列子系统以及子系统之间的切换规则所组成的一种特殊混杂系统, 在机械系统^[1]、机器人系统^[2]、动力传动系统^[3]以及交通控制系统^[4]等领域具有广泛应用. 目前, 切换系统的研究主要包括可控性和可观性^[5]、稳定性与控制设计^[6-12]、故障检测与容错控制^[13-15]以及状态估计^[1,3,16-20]等. 在切换系统状态估计问题的研究中, 文献[16]在保证估计误差的二次性能函数上界存在的情况下, 给出了连续和离散切换系统的状态估计方法; 文献[17]研究了一类跳变自治切换系统的非线性观测器综合问题, 使得估计误差在有限时间内收敛; 文献

[18]提出了一种在有限时间内对切换系统状态进行估计的观测器设计方法; 文献[19]针对一类具有未知输入的切换线性系统, 通过设计切换降维观测器实现了对未知输入切换系统的状态估计; 文献[20]通过设计多模式观测器, 实现了无未知输入切换系统状态的估计. 然而, 文献[1,3,16-18,20]考虑的是切换系统不具有未知输入情形; 文献[19]考虑了未知输入存在的情形, 但没有给出未知输入的估计方法. 可见, 国内外对具有未知输入的切换系统, 进行同时状态估计和未知输入重构的研究并不多见. 此外, 未知输入重构对切换系统故障检测和故障重构以及容错控制也具有重大意义.

收稿日期: 2014-10-14; 修回日期: 2015-01-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61403129); 河南理工大学博士基金项目(B2015-30); 河南省高等学校控制工程重点学科开放实验室基金项目(KG2014-08); 河南省教育厅科学技术基础研究重点项目(13B413028).

作者简介: 杨俊起(1979—), 男, 副教授, 博士, 从事切换系统参数估计的研究; 陈滢涛(1977—), 女, 讲师, 从事模式识别及故障诊断的研究.

本文针对具有未知输入的切换线性系统, 讨论同时对其状态和未知输入进行估计的问题. 主要创新点是: 在存在未知输入的情况下, 给出一种用于估计切换系统状态的降维切换观测器设计方法, 并在此基础上提出一种未知输入估计方法.

1 系统模型和问题描述

考虑如下具有未知输入的不确定线性切换系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\rho(t)}x(t) + B_{\rho(t)}u(t) + D_{\rho(t)}\eta(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$ 和 $y \in \mathbf{R}^p$ 分别是系统的状态、已知输入和可测输出向量; $\eta \in \mathbf{R}^q$ 是系统的不确定未知输入向量; 切换信号 $\rho(t) : \mathbf{R}^+ \rightarrow \Lambda$ 是时间的分段常量函数, 其值取自有限集 $\Lambda = \{1, 2, \dots, M\}$. 离散状态 $\rho(t) = k \in \Lambda$ 确定了在 t 时刻被激活的子系统, 即切换系统当前激活的是第 k 个子系统, 对应的系数矩阵为 A_k 、 B_k 和 D_k . 对于切换序列 $t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots$, 这里 $t_0 = 0$ 为初始时刻, 当 $t \in [t_i, t_{i+1})$ 和 $\rho(t) = k$ 时, 第 k 个子系统被激活. 假设 $p \geq q$ 且输出矩阵 C 是行满秩矩阵, 未知输入分布矩阵 D_k 为列满秩矩阵.

假设 1 对于 $\forall k \in \Lambda$ 和任意具有负实部的复数 s , 下面的秩条件成立:

$$\text{rank}(CD_k) = \text{rank} D_k = q, \quad (2)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A_k & D_k \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + q. \quad (3)$$

引理 1 假设 1 中的秩条件 (2) 和 (3) 同时成立, 当且仅当对于某些正定对称矩阵 $Q_k \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 存在矩阵 $L_k \in \mathbf{R}^{n \times p}$ 和 $G_k \in \mathbf{R}^{q \times p}$, 以至于矩阵方程组

$$\begin{cases} (A_k - L_k C)^T P_k + P_k (A_k - L_k C) = -Q_k, \\ D_k^T P_k = G_k C, \end{cases} \quad (4)$$

具有对称正定矩阵解 $P_k \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 其中 $k \in \Lambda$.

基于文献 [21], 给出计算矩阵 L_k 、 G_k 、 P_k 和 Q_k 的方法如下.

假如最优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \delta, \\ \text{s.t.} \quad & P_k A_k + \Gamma_k C + (P_k A_k + \Gamma_k C)^T < 0, \\ & \begin{bmatrix} \delta I & D_k^T P_k - G_k C \\ (D_k^T P_k - G_k C)^T & \delta I \end{bmatrix} > 0, \end{aligned} \quad (5)$$

具有可行解, 则有

$$L_k = -P_k^{-1} \Gamma_k,$$

$$Q_k = -[(A_k - L_k C)^T P_k + P_k (A_k - L_k C)].$$

本文在平均驻留时间 (ADT) 的条件下, 通过设计切换观测器, 对不确定切换线性系统的状态和未知输入进行估计.

定义 1 用 $N_\rho(\tau_1, \tau_2)$ 表示切换信号 $\rho(t)$ 在时间间隔 (τ_1, τ_2) 的切换次数, 如果存在正常量 N_0 和 τ_a , 使得

$$N_\rho(\tau_1, \tau_2) \leq N_0 + \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_a}, \quad \forall \tau_2 \geq \tau_1 \geq 0 \quad (6)$$

成立, 则 $\rho(t)$ 具有 ADT, 且平均驻留时间为 τ_a .

2 观测器设计

选择可逆矩阵 $N \in \mathbf{R}^{p \times p}$, 使得 $C = N\hat{C}$ 成立. 其中, 矩阵 $\hat{C} \in \mathbf{R}^{p \times n}$, 且满足 $\hat{C}\hat{C}^T = I_p$. 之后, 将矩阵 \hat{C} 扩展为正交矩阵 $T = [\hat{C}^T \quad M^T]^T$, 这里 $M \in \mathbf{R}^{(n-p) \times n}$. 通过状态变换 $\bar{x}(t) = Tx(t)$, 切换系统 (1) 可以等价于

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_{\rho(t)}\bar{x}(t) + \bar{B}_{\rho(t)}u(t) + \bar{D}_{\rho(t)}\eta(t), \\ y(t) = \bar{C}\bar{x}(t). \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$\bar{A}_{\rho(t)} = TA_{\rho(t)}T^T,$$

$$\bar{B}_{\rho(t)} = TB_{\rho(t)},$$

$$\bar{D}_{\rho(t)} = TD_{\rho(t)},$$

$$\bar{C} = CT^T = N[I_p \quad 0].$$

引理 2 假如存在对称正定矩阵 $P_k, Q_k \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 矩阵 $L_k \in \mathbf{R}^{n \times p}$ 和 $G_k \in \mathbf{R}^{q \times p}$, 使得矩阵方程 (4) 成立, 那么存在 $\bar{P}_k = TP_kT^T$, $\bar{Q}_k = TQ_kT^T$, $\bar{L}_k = TL_k$ 和 $\bar{G}_k = G_k$ 使得下列矩阵方程成立:

$$\begin{cases} (\bar{A}_k - \bar{L}_k \bar{C})^T \bar{P}_k + \bar{P}_k (\bar{A}_k - \bar{L}_k \bar{C}) = -\bar{Q}_k, \\ \bar{D}_k^T \bar{P}_k = \bar{G}_k \bar{C}. \end{cases} \quad (8)$$

对于 $\forall \rho(t) = k \in \Lambda$, 分解 \bar{A}_k 、 \bar{B}_k 、 \bar{D}_k 、 \bar{P}_k 和 \bar{Q}_k 成为如下分块矩阵或向量:

$$\bar{A}_k = \begin{bmatrix} \bar{A}_{k,1} & \bar{A}_{k,2} \\ \bar{A}_{k,3} & \bar{A}_{k,4} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_k = \begin{bmatrix} \bar{B}_{k,1} \\ \bar{B}_{k,2} \end{bmatrix}, \quad \bar{D}_k = \begin{bmatrix} \bar{D}_{k,1} \\ \bar{D}_{k,2} \end{bmatrix},$$

$$\bar{P}_k = \begin{bmatrix} \bar{P}_{k,1} & \bar{P}_{k,2} \\ \bar{P}_{k,2}^T & \bar{P}_{k,3} \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{k,1} & \bar{Q}_{k,2} \\ \bar{Q}_{k,2}^T & \bar{Q}_{k,3} \end{bmatrix}.$$

其中: $\bar{A}_{k,1}, \bar{P}_{k,1}, \bar{Q}_{k,1} \in \mathbf{R}^{p \times p}$, $\bar{B}_{k,1} \in \mathbf{R}^{p \times m}$, $\bar{D}_{k,1} \in \mathbf{R}^{p \times q}$. 则切换系统 (7) 可以分解为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{A}_{\rho(t),1}\bar{x}_1(t) + \bar{A}_{\rho(t),2}\bar{x}_2(t) + \\ \quad \bar{B}_{\rho(t),1}u(t) + \bar{D}_{\rho(t),1}\eta(t), \\ \dot{\bar{x}}_2(t) = \bar{A}_{\rho(t),3}\bar{x}_1(t) + \bar{A}_{\rho(t),4}\bar{x}_2(t) + \\ \quad \bar{B}_{\rho(t),2}u(t) + \bar{D}_{\rho(t),2}\eta(t), \\ y(t) = N\bar{x}_1(t). \end{cases} \quad (9)$$

其中: $\bar{x}_1(t) \in \mathbf{R}^p$, $\bar{x}_2(t) \in \mathbf{R}^{n-p}$. 假如取矩阵 $\bar{K}_k = -\bar{P}_{k,3}^{-1}\bar{P}_{k,2}^T$, 基于矩阵 \bar{C} , 从式 (8) 的第 2 式可得

$$[\bar{P}_{k,2}^T \quad \bar{P}_{k,3}]\bar{D}_k = 0,$$

两边同时左乘 $\bar{P}_{k,3}^{-1}$, 则有

$$[-\bar{K}_k \quad I]\bar{D}_k = 0. \quad (10)$$

从系统 (9) 的输出可以看出, 由于 \mathbf{N} 是可逆矩阵, 状态 $\bar{x}_1(t)$ 可以直接由输出 $y(t)$ 得到, 即

$$\bar{x}_1(t) = \mathbf{N}^{-1}y(t). \quad (11)$$

对于状态 $\bar{x}_2(t)$, 取如下状态变换:

$$\xi_2(t) = -\bar{\mathbf{K}}_k \bar{x}_1(t) + \bar{x}_2(t), \quad (12)$$

其中 $\xi_2(t) \in \mathbf{R}^{n-p}$. 基于式 (9)~(12), 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2(t) = & (\bar{A}_{k,4} - \bar{\mathbf{K}}_k \bar{A}_{k,2})\xi_2(t) + [-\bar{\mathbf{K}}_k \quad \mathbf{I}]\bar{B}_k u(t) + \\ & (\bar{A}_{k,3} - \bar{\mathbf{K}}_k \bar{A}_{k,1})\mathbf{N}^{-1}y(t) + \\ & (\bar{A}_{k,4} - \bar{\mathbf{K}}_k \bar{A}_{k,2})\bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{N}^{-1}y(t). \end{aligned} \quad (13)$$

定理 1 在假设 1 成立的前提下, 给定正常量 $\mu_2 > \mu_1 > 0$, 如果存在正定对称矩阵 $S \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 使得矩阵不等式

$$\mu_1 S < P_k < \mu_2 S \quad (14)$$

成立, 则动态系统

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}}_2(t) = (\bar{A}_{k,4} - \bar{\mathbf{K}}_k \bar{A}_{k,2})\hat{\xi}_2(t) + \\ (\bar{A}_{k,4} - \bar{\mathbf{K}}_k \bar{A}_{k,2})\bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{N}^{-1}y(t) + \\ (\bar{A}_{k,3} - \bar{\mathbf{K}}_k \bar{A}_{k,1})\mathbf{N}^{-1}y(t) + \\ [-\bar{\mathbf{K}}_k \quad \mathbf{I}]\bar{B}_k u(t), \\ \hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{-1}y(t) \\ \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{N}^{-1}y(t) + \hat{\xi}_2(t) \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (15)$$

是系统 (7) 的降维切换观测器或系统 (13) 的一个全维切换观测器, 且切换系统的 ADT 时间满足

$$\tau_a \geq \frac{\ln(\kappa_1)}{\kappa_2}. \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\mu_2}{\mu_1}, \\ \kappa_2 &= \inf_{\ell \in \Lambda} \left(\frac{\lambda_{\min}(\bar{Q}_{\ell,3})}{\lambda_{\max}(\bar{P}_{\ell,3})} \right), \end{aligned}$$

即 $\frac{\ln(\kappa_1)}{\kappa_2}$ 是切换系统具有的平均驻留时间的下界.

证明 由式 (13) 和 (15) 的第 1 式, 可以得到观测器误差动态系统

$$\dot{\tilde{\xi}}_2(t) = (\bar{A}_{k,4} - \bar{\mathbf{K}}_k \bar{A}_{k,2})\tilde{\xi}_2(t), \quad (17)$$

其中 $\tilde{\xi}_2 = \xi_2 - \hat{\xi}_2$. 从矩阵 \bar{C} 的特殊结构可以发现, 矩阵方程 (8) 的第 1 式的第 2 行和第 2 列的块矩阵满足

$$\bar{A}_{k,2}^T \bar{P}_{k,2} + \bar{A}_{k,4}^T \bar{P}_{k,3} + \bar{P}_{k,2}^T \bar{A}_{k,2} + \bar{P}_{k,3} \bar{A}_{k,4} = -\bar{Q}_{k,3},$$

这意味着下式成立:

$$\begin{aligned} (\bar{A}_{k,4} - \bar{\mathbf{K}}_k \bar{A}_{k,2})^T \bar{P}_{k,3} + \bar{P}_{k,3} (\bar{A}_{k,4} - \bar{\mathbf{K}}_k \bar{A}_{k,2}) = \\ -\bar{Q}_{k,3}. \end{aligned} \quad (18)$$

考虑 Lyapunov 函数 $V_k(\tilde{\xi}_2(t)) = \tilde{\xi}_2^T(t) \bar{P}_{k,3} \tilde{\xi}_2(t)$, 并可由式 (18) 得到其沿动态误差系统 (17) 的微分为

$$\begin{aligned} \dot{V}_k(\tilde{\xi}_2(t)) = \\ -\tilde{\xi}_2^T(t) \bar{Q}_{k,3} \tilde{\xi}_2(t) \leq -\lambda_{\min}(\bar{Q}_{k,3}) \tilde{\xi}_2^T(t) \tilde{\xi}_2(t) \leq \\ -\frac{\lambda_{\min}(\bar{Q}_{k,3})}{\lambda_{\max}(\bar{P}_{k,3})} V_k(\tilde{\xi}_2(t)) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\inf_{\ell \in \Lambda} \left(\frac{\lambda_{\min}(\bar{Q}_{\ell,3})}{\lambda_{\max}(\bar{P}_{\ell,3})} \right) V_k(\tilde{\xi}_2(t)) = \\ -\kappa_2 V_k(\tilde{\xi}_2(t)). \end{aligned}$$

故, 对于 $t \in [t_i, t_{i+1})$ 和 $\rho(t_i) = k$, 积分上式可以得到

$$V_{\rho(t_i)}(\tilde{\xi}_2(t)) \leq e^{-\kappa_2(t-t_i)} V_k(\tilde{\xi}_2(t_i)). \quad (19)$$

由于 $\bar{P}_k = T P_k T^T$, 由式 (14) 容易得到

$$\mu_1 \mathbf{H} < \bar{P}_k < \mu_2 \mathbf{H}, \quad (20)$$

其中 $\mathbf{H} = T S T^T$. 如果分解矩阵 \mathbf{H} 为分块矩阵 $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2^T & \mathbf{H}_3 \end{bmatrix}$, 其中: $\mathbf{H}_1 \in \mathbf{R}^{p \times p}$, $\mathbf{H}_3 \in \mathbf{R}^{(n-p) \times (n-p)}$. 则式 (20) 意味着

$$\mu_1 \mathbf{H}_3 < \bar{P}_{k,3} < \mu_2 \mathbf{H}_3 \quad (21)$$

成立. 对于 $\forall (k, k') \in \Lambda \times \Lambda$, $k \neq k'$, 可以进一步从式 (19) 和 (21) 得到

$$\begin{aligned} V_{\rho(t_i)}(\tilde{\xi}_2(t)) \leq \\ e^{-\kappa_2(t-t_i)} \frac{V_{\rho(t_i)}(\tilde{\xi}_2(t_i))}{V_{\rho(t_i)}(\tilde{\xi}_2(t_i^-))} V_{\rho(t_i)}(\tilde{\xi}_2(t_i^-)) = \\ e^{-\kappa_2(t-t_i)} \frac{\tilde{\xi}_2^T(t_i) \bar{P}_{k,3} \tilde{\xi}_2(t_i)}{\tilde{\xi}_2^T(t_i^-) \bar{P}_{k',3} \tilde{\xi}_2(t_i^-)} V_{\rho(t_i)}(\tilde{\xi}_2(t_i^-)) < \\ e^{-\kappa_2(t-t_i)} \frac{\mu_2 \tilde{\xi}_2^T(t_i) \mathbf{H}_3 \tilde{\xi}_2(t_i)}{\mu_1 \tilde{\xi}_2^T(t_i^-) \mathbf{H}_3 \tilde{\xi}_2(t_i^-)} V_{\rho(t_i)}(\tilde{\xi}_2(t_i^-)) = \\ \kappa_1 e^{-\kappa_2(t-t_i)} V_{\rho(t_i)}(\tilde{\xi}_2(t_i^-)). \end{aligned} \quad (22)$$

因此, 对于 $t \in [t_i, t_{i+1})$, 基于式 (19) 和 (22), 从 $t_0 = 0$ 到 t_{i+1} 迭代计算, 可以得到

$$\begin{aligned} V_{\rho(t)}(\tilde{\xi}_2(t)) \leq \\ e^{-\kappa_2(t-t_i)} V_{\rho(t_i)}(\tilde{\xi}_2(t_i)) < \\ \kappa_1 e^{-\kappa_2(t-t_i)} \tilde{\xi}_2^T(t_i^-) \bar{P}_{\rho(t_i^-),3} \tilde{\xi}_2(t_i^-) = \\ \kappa_1 e^{-\kappa_2(t-t_i)} V_{\rho(t_{i-1})}(\tilde{\xi}_2(t_{i-1}^-)) \leq \\ \kappa_1 e^{-\kappa_2(t-t_i)} e^{-\kappa_2(t_i-t_{i-1})} V_{\rho(t_{i-1})}(\tilde{\xi}_2(t_{i-1})) < \\ \kappa_1^2 e^{-\kappa_2(t-t_i)} e^{-\kappa_2(t_i-t_{i-1})} V_{\rho(t_{i-1}^-)}(\tilde{\xi}_2(t_{i-1}^-)) \leq \\ \kappa_1^2 e^{-\kappa_2(t-t_{i-2})} V_{\rho(t_{i-2})}(\tilde{\xi}_2(t_{i-2})) \leq \\ \vdots \\ \kappa_1^{N_{\rho(t)}(t,0)} e^{-\kappa_2(t-t_0)} V_{\rho(t_0)}(\tilde{\xi}_2(t_0)). \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} N_{\rho(t)}(t, 0) \leq N_0 + \frac{t-0}{\tau_a} = N_0 + \frac{t}{\tau_a}, \\ \kappa_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1} > 1, \end{aligned}$$

可以得到

$$\begin{aligned} V_{\rho(t)}(\tilde{\xi}_2(t)) \leq \\ \kappa_1^{N_0 + \frac{t}{\tau_a}} e^{-\kappa_2 t} V_{\rho(t_0)}(\tilde{\xi}_2(t_0)) = \\ \kappa_1^{N_0} e^{\ln \kappa_1 \frac{t}{\tau_a}} e^{-\kappa_2 t} V_{\rho(t_0)}(\tilde{\xi}_2(t_0)) = \\ \kappa_1^{N_0} e^{\frac{t}{\tau_a} \ln \kappa_1} e^{-\kappa_2 t} V_{\rho(t_0)}(\tilde{\xi}_2(t_0)) = \end{aligned}$$

$$\kappa_1^{N_0} e^{-\kappa_2 t + \frac{t}{\tau_a} \ln \kappa_1} V_{\rho(t_0)}(\tilde{\xi}_2(t_0)),$$

上式等价于

$$V_{\rho(t)}(\tilde{\xi}_2(t)) < \kappa_1^{N_0} e^{-(\kappa_2 - \frac{1}{\tau_a} \ln \kappa_1)t} V_{\rho(t_0)}(\tilde{\xi}_2(t_0)). \quad (23)$$

由式(16)可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 不等式(23)预示着 Lyapunov 函数 $V_{\rho(t)}(\tilde{\xi}_2(t))$ 指数趋近于 0, 故切换观测器误差 $\tilde{\xi}_2(t)$ 指数趋近于 0. 由此定理得证. \square

在通过降维观测器系统(15)得到状态 $\xi_2(t)$ 的估计之后, 基于式(11)和状态变换(12), 容易得到状态 \hat{x} 的估计为

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{-1}y(t) \\ \xi_2(t) + \bar{\mathbf{K}}_k \bar{x}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{-1}y(t) \\ \xi_2(t) + \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{N}^{-1}y(t) \end{bmatrix}.$$

基于状态变换 $\bar{x}(t) = T x(t)$, 进一步可以得到原切换系统的连续状态估计为

$$\hat{x}(t) = T^{-1} \hat{\bar{x}}(t) = T^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{-1}y(t) \\ \xi_2(t) + \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{N}^{-1}y(t) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

由引理 1 可知, 假设 1 中的两个秩条件成立的充分必要条件是矩阵方程组(4)有对称正定解矩阵 P_k , 可以通过求解最优化问题(5)得到. 因此, 结合式(5)和定理 1 可直接得到如下推论.

推论 1 对于给定 $\mu_2 > \mu_1 > 0$, 存在正定对称矩阵 P_k 、 S 和矩阵 L_k 、 G_k , 使得最优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \delta, \\ \text{s.t.} \quad & \mu_1 S < P_k < \mu_2 S, \end{aligned}$$

$$P_k A_k + \Gamma_k C + (P_k A_k + \Gamma_k C)^T < 0,$$

$$\begin{bmatrix} \delta I & D_k^T P_k - G_k C \\ (D_k^T P_k - G_k C)^T & \delta I \end{bmatrix} > 0,$$

具有可行解, 则动态系统(15)是原系统的一个降维切换观测器, 且正定对称矩阵为 $Q_k = -[(A_k - L_k C)^T P_k + P_k (A_k - L_k C)]$, 观测器增益矩阵为 $L_k = -P_k^{-1} \Gamma_k$.

注 1 本文基于 ADT 研究了切换系统状态和未知输入的估计问题. 针对文献[22]提出的改进 ADT 方法, 对不确定切换系统的状态和未知输入进行估计, 需要修改定理 1 中的式(15)和(16), 以期得到新的驻留时间下界. 但是, 对于观测器误差系统的稳定性分析以及是否需要其他条件等一系列问题, 需作更为深入的研究. 此外, 如果考虑系统(1)的输出矩阵不同的情况, 则使得假设 1 中秩条件(2)和(3)更为苛刻, 并需要考虑输出 y 的切换给观测器设计带来的影响. 对于改进 ADT 方法以及输出矩阵不同的情形, 将是今后值得研究的课题.

3 未知输入重构

由切换线性系统(1)可得系统输出向量的微分为

$$\dot{y}(t) = C A_{\rho(t)} x(t) + C B_{\rho(t)} u(t) + C D_{\rho(t)} \eta(t). \quad (25)$$

由于系统假设 $p \geq q$, 且矩阵 $(C D_{\rho(t)}) \in \mathbf{R}^{p \times q}$ 是满秩矩阵, 由式(25)可得 $\eta(t)$ 具有如下特解:

$$\eta(t) = \Pi[\dot{y}(t) - C A_{\rho(t)} x(t) - C B_{\rho(t)} u(t)], \quad (26)$$

其中 $\Pi = ((C D_{\rho(t)})^T (C D_{\rho(t)}))^{-1} (C D_{\rho(t)})^T$ 是满秩矩阵 $(C D_{\rho(t)})$ 的 Moore-Penrose 伪逆矩阵.

定理 2 在假设 1 成立, 且系统输出微分 $\dot{y}(t)$ 已知的情况下, 未知输入向量 $\eta(t)$ 的估计为

$$\hat{\eta}(t) = \Pi[\dot{y}(t) - C A_{\rho(t)} \hat{x}(t) - C B_{\rho(t)} u(t)]. \quad (27)$$

证明 在式(26)与(27)之间的误差方程为

$$\tilde{\eta}(t) = -\Pi C A_{\rho(t)} \tilde{x}(t).$$

其中: $\tilde{\eta}(t) = \eta(t) - \hat{\eta}(t)$, $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. 由于 $\hat{x}(t)$ 是系统 $x(t)$ 的渐近估计, 在输出微分已知的情况下, $\hat{\eta}(t)$ 是 $\eta(t)$ 的渐近估计. 由此定理得证. \square

假设 $y_\ell(t)$ ($\ell = 1, 2, \dots, p$) 是系统输出的第 ℓ 个分量. N 等分系统的运行区间为 $[0, t]$, 得到 $N + 1$ 个时间点 $t'_r = t'_0 + rh$. 其中: $r = 0, 1, \dots, N$; 步长 $h = \frac{t - 0}{N}$. 对于系统的第 ℓ 个输出分量, 记 $\left. \frac{dy_\ell(t)}{dt} \right|_{t=t'_r}$ 的近似值为 $\theta_{\ell,r}$, 则可以分别采用向后差商和向前差商, 求得 t'_0 和 t'_N 时间点处的微分近似值为

$$\begin{cases} \theta_{\ell,0} = \frac{y_\ell(t'_1) - y_\ell(t'_0)}{h}, \\ \theta_{\ell,N} = \frac{y_\ell(t'_N) - y_\ell(t'_{N-1})}{h}. \end{cases} \quad (28)$$

对于 $r = 1, 2, \dots, N - 1$, 采用中心差商方法可求解各对应时间点处的微分为

$$\theta_{\ell,r} = \frac{y_\ell(t'_{r+1}) - y_\ell(t'_{r-1})}{2h}. \quad (29)$$

综合式(28)和(29), 可以得到

$$\theta_\ell = [\theta_{\ell,0} \quad \theta_{\ell,1} \quad \dots \quad \theta_{\ell,N}]^T$$

是输出分量 $y_\ell(t)$ ($\ell = 1, 2, \dots, p$) 在运行区间 $[0, t]$ 上的微分数值解, 故

$$\theta = [\theta_1^T \quad \theta_2^T \quad \dots \quad \theta_p^T]^T \quad (30)$$

是切换系统(1)的输出向量微分

$$\dot{y}(t) = [\dot{y}_1^T(t) \quad \dot{y}_2^T(t) \quad \dots \quad \dot{y}_p^T(t)]^T$$

在运行区间 $[0, t]$ 上的近似微分数值解. 之后, 将得到的微分数值解(30)代替式(27)中的 $\dot{y}(t)$, 即可得未知输入的近似估计 $\hat{\eta}(t)$.

4 仿 真

本节通过一个具有未知输入的切换线性系统进行仿真, 以验证所提方法的有效性. 该系统由 2 个子系统组成, 并在给定的切换规则下实现切换, 各子系统的系统参数如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

已知和未知输入分别设定为

$$u = [u_1 \ u_2]^T, \eta = [\eta_1 \ \eta_2]^T.$$

其中: $u_1 = 12 \sin(1.5t)$, $u_2 = 5.6 \cos(3.5t)$, $\eta_1 = 3.6 \cos(2.8t)$, $\eta_2 = 1.8 \sin(4.2t)$. 参数 $\mu_1 = 1, \mu_2 = 1.2$, 那么通过求解推论 1 中的最优化问题, 可以得到正定对称矩阵 P_k, Q_k 以及观测器增益矩阵 L_k , 其中 $k = 1, 2$. 对系统输出矩阵 C 进行正交变换, 可以得到满足等价系统 (7) 的转换矩阵 T, N , 以及使得矩阵方程 (7) 成立的对称正定矩阵 $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{G}_1$ 和 \bar{G}_2 . 进一步可以得到对称正定矩阵 \bar{Q}_1, \bar{Q}_2 , 以及降维切换系统 (13) 中的增益矩阵 \bar{K}_1 和 \bar{K}_2 . 容易计算 $\kappa_1 = 1.2, \kappa_2 = 1.6468$, 所以要求 ADT 时间满足 $\tau_a \geq \frac{\ln(\kappa_1)}{\kappa_2} = 0.1107$. 在仿真中, 采用如图 1 所示的子系统切换序列, 其 ADT 时间为 $\tau_a = 2$.

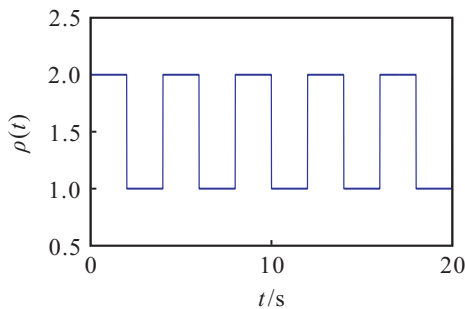


图 1 具有 $\tau_a = 2$ 的切换信号

由于维数 $n = 4, p = 2$, 切换降维观测器系统 (15) 的维数为 $n - p = 2$. 如果设定系统 (15) 的初始状态为 $\hat{\xi}_2(0) = [-1.9 \ 2.8]^T$, 那么从式 (15) 可以得到切换降维系统 (13) 的状态估计, 其估计曲线如图 2 所示, 由图 2 可以看出其估计效果是令人满意的.

在得到系统 (13) 的状态估计之后, 结合式 (15) 的第 2 式和式 (24), 可以得到原切换系统 (1) 的状态估计. 从输出矩阵 C 可以看出, 切换系统 (1) 的状态分量 $x_2(t)$ 和 $x_4(t)$ 是输出可测的, 因此这里只给出状态 $x_1(t)$ 和 $x_3(t)$ 的状态估计效果. 如果切换系统 (1) 的状态初始值设定为 $x(0) = [-1.5 \ 3.2 \ -4.2 \ 2.3]^T$, 则可

以得到状态估计误差如图 3 所示.

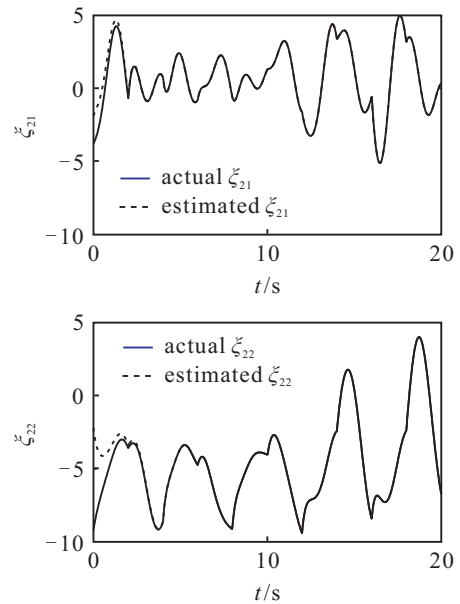


图 2 降维系统状态估计曲线

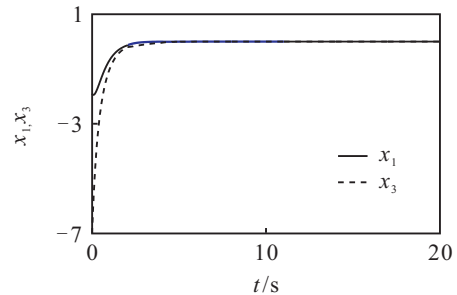


图 3 切换系统状态估计误差曲线

基于切换系统的状态估计, 通过式 (28) 和 (29) 可以得到系统输出的微分数值解. 在得到系统状态和输出微分估计的基础上, 从式 (27) 可以得到系统未知输入信号的近似估计, 其估计效果如图 4 和图 5 所示.

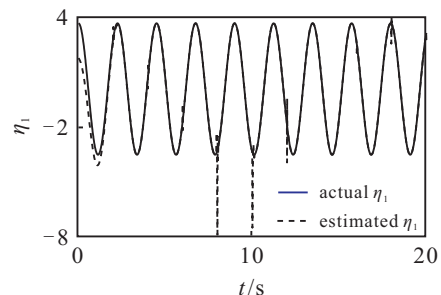


图 4 未知输入 η_1 的估计曲线

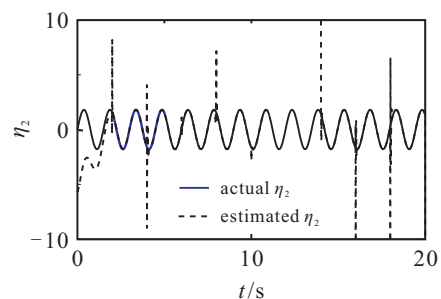


图 5 未知输入 η_2 的估计曲线

从图4和图5可以看出,切换造成了微分在切换前后的不连续.如何改进本文提出的方法,使其在系统发生切换的情况下实现对未知输入的连续估计是下一步要解决的问题.

5 结 论

本文针对一类具有未知输入的线性切换系统,讨论了同时对切换系统状态估计和未知输入重构的方法.通过设计切换降维观测器,对切换系统连续状态进行估计,并给出了观测器存在的充分条件.同时,利用函数微分数值解的方法估计系统输出的微分,并给出了一种重构未知输入的方法.本文所设计的状态估计和未知输入重构方法可应用于切换系统的故障检测和故障重构以及切换系统容错控制等领域.

参考文献(References)

- [1] Alessandri A, Coletta P. Design of Luenberger observers for a class of hybrid linear systems[C]. Hybrid Systems: Computation and Control. Rome: Springer Verlag, 2001: 7-18.
- [2] Westervelt E R, Grizzle J W, Canudas De Wit C. Switching and PI control walking motions of planar biped walkers[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(2): 308-312.
- [3] Balluchi A, Benvenuti L, Benedetto M D D, et al. A hybrid observer for the driveline dynamics[C]. Proc of the European Control Conf. Porto: 2001: 618-623.
- [4] Balluchi A, Di Benedett M D, Pinello C, et al. Hybrid control in automotive applications: The cut-off control[J]. Automatica, 1999, 35(3): 519-535.
- [5] Cheng D. Controllability of switched bilinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(4): 511-515.
- [6] 张霞, 高岩, 夏尊铨. 切换线性系统稳定性研究进展[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1441-1450.
(Zhang X, Gao Y, Xia Z Q. Advances on stability for switched linear systems[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1441-1450.)
- [7] Sun Z. Stabilizing switching design for switching linear systems: A state-feedback path-wise switching approach[J]. Automatica, 2009, 45(7): 1708-1714.
- [8] 赵立英, 张志强, 赵向奎. 一类时滞切换系统的稳定性分析[J]. 控制与决策, 2011, 26(7): 1113-1116.
(Zhao L Y, Zhang Z Q, Zhao X K. Stability analysis of a class of switched systems with time delay[J]. Control and Decision, 2011, 26(7): 1113-1116.)
- [9] 袁月华, 岳东, 田恩刚. 驻留概率信息方法的离散切换系统鲁棒 H_∞ 控制[J]. 控制理论与应用, 2014, 31(2): 175-180.
(Yuan Y H, Yue D, Tian E G. Robust H_∞ control for discrete switched systems by using sojourn-probability-dependent method[J]. Control Theory & Application, 2014, 31(2): 175-180.)
- [10] Wang Y, Sun X, Zhao J. Asynchronous H_∞ control of switched delay systems with average dwell time[J]. J of the Franklin Institute, 2012, 349(10): 3159-3169.
- [11] Zhao X, Yin S, Li H, et al. Switching stabilization for a class of slowly switched systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2015, 60(1): 221-226.
- [12] Xiang W, Xiao J. Finite-time stability and stabilisation for switched linear systems[J]. Int J of Systems Science, 2013, 44(2): 384-400.
- [13] Xiang W, Xiao J, Iqbal M N. Fault detection for switched nonlinear systems under asynchronous switching[J]. Int J of Control, 2011, 84(8): 1362-1376.
- [14] Du D, Jiang B, Shi P. Fault detection for discrete-time switched systems with intermittent measurements[J]. Int J of Control, 2012, 85(1): 78-87.
- [15] 董学平, 温锐, 刘红亮. 一类时滞分布参数切换系统的鲁棒容错控制[J]. 控制与决策, 2012, 27(2): 232-236.
(Dong X P, Wen R, Liu H L. Robust fault-tolerant control for a class of distributed parameter switched system with time-delay[J]. Control and Decision, 2012, 27(2): 232-236.)
- [16] Alessandri A, Coletta P. Switching observers for continuous-time and discrete-time linear systems[C]. Proc of American Control Conf. Arlington: IEEE, 2001: 2516-2521.
- [17] Barbot J P, Saadaoui H, Djemai M, et al. Nonlinear observer for autonomous switching systems with jumps[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2007, 1(4): 537-547.
- [18] Bejarano F J, Fridman L. State exact reconstruction for switched linear systems via a super-twisting algorithm[J]. Int J of Systems Science, 2011, 42(5): 717-724.
- [19] Bejarano F J, Pisano A. Switched observers for switched linear systems with unknown inputs[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2011, 56(3): 681-686.
- [20] Zhao X, Liu H, Zhang J, et al. Multiple-mode observer design for a class of switched linear systems[J]. IEEE Trans on Automation Science and Engineering, 2015, 12(1): 272-280.
- [21] Corless M, Tu J. State and input estimation for a class of uncertain systems[J]. Automatica, 1998, 34(6): 757-764.
- [22] Guo R. Stability analysis of a class of switched nonlinear systems with an improved average dwell time method[J]. Abstract and Applied Analysis, 2014: 1-8.