

灰色 Verhulst 模型背景值优化及其应用

丁松, 党耀国, 徐宁, 崔杰

(南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016)

摘要: 鉴于背景值是影响灰色建模精度的重要因素之一, 提出一种灰色 Verhulst 模型中背景值的优化方法. 基于灰色 Verhulst 模型时间响应式的 Logistic 函数形式和背景值的几何意义, 利用积分中值定理研究背景值与发展系数之间的数量关系; 采用最小二乘法对新参数进行估计, 还原原始参数估计值, 使得优化的背景值模型同时具备无偏性和最小误差性. 案例分析表明, 背景值优化的模型改善了模拟精度, 验证了模型的有效性和可行性.

关键词: 灰色 Verhulst 模型; Logistic 函数; 背景值; 最小二乘

中图分类号: N941.5

文献标志码: A

Optimized background value in grey Verhulst model and its application

DING Song, DANG Yao-guo, XU Ning, CUI Jie

(College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China. Correspondent: DING Song, E-mail: dingsong1129@163.com)

Abstract: As the background value is an important factor affecting the precision of grey system model, a method for optimizing the background value in the grey Verhulst model is proposed. Based on the Logistic function structure of time response formula in the grey Verhulst model and the geometric meaning of background value formula, the mean value theorem of integral is used to study the numerical relationship between the background value and the growth coefficient. New parameters are evaluated by using least square method, and the estimated value of original parameters is calculated by using equations. The model with the new background value satisfies the unbiased and least error. The examples show that the precision of simulation of the optimized model is obviously higher and the efficiency and feasibility of the optimized model are validated.

Keywords: grey Verhulst model; Logistic function; background value; least square

0 引言

自1982年邓聚龙教授提出灰色系统理论以来, 灰色预测模型已在经济社会的很多领域得到了广泛的应用, 尤其在缺乏样本数据的情况下, 更能体现灰色预测模型的优越性^[1]. 在灰色预测模型中, 对GM(1,1)模型的研究相对较多, 很多学者对其精度的提高、应用领域的拓展等方面进行了深入的研究^[2-3]. 但是GM(1,1)模型仅适用于具有准指数规律的数据序列; 而对于一些特殊的数据序列, 如S形态的序列, 则不宜采用GM(1,1)模型进行预测, 此时适宜采用灰色 Verhulst 等模型进行预测^[4]. Verhulst 模型主要用来描述数据呈现S形态、具有饱和状态的过程, 常用于

人口预测、滑坡预测和产品经济寿命预测等, 近些年, 其应用领域不断扩大. 邓晖等^[5]提出了一种基于改进灰色 Verhulst 模型的受扰轨迹拟合外推预测方法, 并将其应用到IEEE39节点系统和南方电网实际系统的不同故障情形的仿真计算中, 获得了较好的预测效果. Peleg 等^[6]根据微生物生长的特点, 利用 Verhulst 模型对微生物生长曲线进行修正, 使得修正后的模型更适合S型微生物生长路径. Gross 等^[7]在 Verhulst 模型的基础上合成了一种新的分布式功率控制算法, 并将该算法引入直接序列码分多址系统中, 取得了较好的测算效果.

一些学者对灰色 Verhulst 模型进行了优化研究,

收稿日期: 2014-06-23; **修回日期:** 2014-11-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71371098, 71301060); 江苏省高校哲学社会科学重点研究基金重大项目(2012JDXM005); 江苏省普通高校研究生科研创新计划项目(CXZZ13_0183); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(NC2012001, NZ2010006).

作者简介: 丁松(1992-), 男, 博士生, 从事灰色系统理论、产业经济的研究; 党耀国(1964-), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论、数量经济等研究.

使得灰色 Verhulst 模型的预测精度和应用范围得到了一定的提高与拓展. 何文章等^[8]利用线性规划方法估计了灰色 Verhulst 模型中的参数, 提高了模型的预测精度. 王正新等^[9]提出了无偏灰色 Verhulst 模型, 消除了灰色 Verhulst 模型自身固有的偏差. 熊萍萍等^[10]利用 Logistic 函数性质推导出灰色 Verhulst 模型背景值的优化公式, 建立了优化的灰色 Verhulst 模型, 有效提高了传统灰色 Verhulst 模型的模拟预测精度. 刘威等^[11]提出了基于最小一乘准则估计灰色 Verhulst 模型参数, 得到了新的预测公式. Xiong 等^[12]建立了优化时间响应函数的非等间距灰色 Verhulst 模型, 较原有模型获得了更好的模拟预测效果. 崔杰等^[13]分析了灰色 Verhulst 预测模型的数乘特性, 在不改变建模精度的条件下, 利用数乘变换可以简化建模过程. 杨德玲等^[14]构建了适用于区间灰数的 Verhulst 预测模型, 拓展了 Verhulst 模型的应用领域, 丰富和完善了灰色预测模型的理论体系.

从目前检索的文献来看, 人们对灰色 Verhulst 模型的研究偏向于参数优化、无偏性和模型应用等方面, 对其背景值优化研究不是很多, 仅文献 [10] 对灰色 Verhulst 模型背景值做了优化研究. 文献 [10] 基于灰色 Verhulst 模型时间响应式的 Logistic 函数形式, 经过一系列的数学假设和推导, 得到了灰色 Verhulst 模型背景值优化公式. 当序列不含噪声且 $X^{(1)}$ 满足 Logistic 函数规律时, 该背景值优化方法完全适用; 而当序列含有噪声扰动时, 该方法模拟预测容易产生偏差. 为了避免小样本含噪声的序列对优化方法造成的影响, 根据背景值的几何意义, 本文提出一种新的背景值优化方法. 该方法可以保证背景值优化模型的无偏性和最小误差性, 从而提高灰色 Verhulst 模型的模拟预测精度. 案例分析表明了本文提出方法的有效性和可行性.

1 灰色 Verhulst 模型背景值修正

1.1 传统灰色 Verhulst 模型

定义 1 设非负原始序列为 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$, 而 $X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\}$ 为其 1-AGO 序列, 其中 $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$; $Z^{(1)} = (z^{(1)}(1), z^{(1)}(2), \dots, z^{(1)}(n))$ 为 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列, 其中 $z^{(1)}(k) = [x^{(1)}(k-1) + x^{(1)}(k)]/2$, $k = 2, 3, \dots, n$, 则称

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b(z^{(1)}(k))^2 \quad (1)$$

为灰色 Verhulst 模型, $z^{(1)}(k)$ 为 Verhulst 模型的背景值, 称

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b(x^{(1)}(t))^2 \quad (2)$$

为 Verhulst 模型的白化方程.

根据式 (1), 在最小二乘意义下可以估计出参数 a 、 b 的值, 再将 a 、 b 的估计值代入式 (2), 在初始条件 $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ 下, 解得灰色 Verhulst 模型的时间响应式为

$$\hat{x}^{(1)}(t+1) = \frac{ax^{(1)}(1)}{bx^{(1)} + (a - bx^{(1)}(1))e^{at}}, \quad (3)$$

经过累减还原为 $\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k)$.

从以上过程可以看出, 灰色 Verhulst 模型的精度取决于参数 a 、 b , 而 a 、 b 值又直接受 $z^{(1)}(k)$ 的构造形式影响, 即背景值 $z^{(1)}(k)$ 如何选取是导致连续方程到离散方程跳变时产生误差的关键因素之一.

将灰色 Verhulst 模型的白化方程 (2) 的两边同除以 $(x^{(1)}(t))^2$, 得到

$$\frac{1}{(x^{(1)}(t))^2} \frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + \frac{a}{x^{(1)}(t)} = b,$$

在区间 $[k-1, k]$ 内, 方程两边同时积分, 可得

$$\int_{k-1}^k \frac{1}{(x^{(1)}(t))^2} \frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + \int_{k-1}^k \frac{a}{x^{(1)}(t)} dt = b,$$

即

$$\left\{ \frac{1}{x^{(1)}(k-1)} - \frac{1}{x^{(1)}(k)} \right\} + a \int_{k-1}^k \frac{1}{x^{(1)}(t)} dt = b. \quad (4)$$

于是灰色 Verhulst 模型可以转化为式 (4), 此时求出的 a 、 b 所产生的误差最小.

令 $y^{(1)}(k) = 1/x^{(1)}(k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, 可以得到倒数变换序列 $Y^{(1)} = \{y^{(1)}(1), y^{(1)}(2), \dots, y^{(1)}(n)\}$. 对 $Y^{(1)}$ 作一次累减生成, 得到一次累减生成序列 $Y^{(0)} = \{y^{(0)}(1), y^{(0)}(2), \dots, y^{(0)}(n)\}$. 其中: $y^{(0)}(k) = y^{(1)}(k) - y^{(1)}(k-1)$, $k = 2, 3, \dots, n$. 因此式 (4) 可以变换为

$$-y^{(0)}(k) + a \int_{k-1}^k y^{(1)}(t) dt = b, \quad (5)$$

离散化后, 得

$$-y^{(0)}(k) + az^{*(1)}(k) = b. \quad (6)$$

从几何意义上看, 背景值 $z^{*(1)}(k)$ 为 $[k-1, k]$ 区间上曲线与横坐标轴围成的平面图形的面积, 背景值的准确表达形式应为 $z_0(k) = \int_{k-1}^k y^{(1)}(t) dt$. 当白化方程式 (5) 转化为离散形式 (6) 时, 背景值 $z^{*(1)}(k)$ 选取是否准确将影响到 a 、 b 的估计值, 并最终影响模型精度. 因此, 如何优化背景值构造方法使得灰色 Verhulst 模型同时满足无偏性和含噪声序列建模时误差最小两个要求, 这将是本文的研究重点和关键问题.

1.2 灰色 Verhulst 模型背景值与发展系数 a 之间的数量关系及性质分析

定理 1 背景值 $z_0(k)$ 为 $y^{(1)}(k-1)$ 与 $y^{(1)}(k)$ 的线性组合, 即存在 $\beta \in [0, 1]$, 使

$$z_0(k) = \beta y^{(1)}(k-1) + (1-\beta) y^{(1)}(k).$$

证明 由中值定理可知, 存在 $\beta \in [0, 1]$, 使 $z_0(k) = \beta y^{(1)}(k-1) + (1-\beta)y^{(1)}(k)$. \square

定理 2 记原始序列为 $X^{(0)}$, $X^{(0)}$ 的 1-AGO 序列为 $X^{(1)}$, $X^{(1)}$ 的倒数变换序列为 $Y^{(1)}$, $Y^{(1)}$ 的一次累减生成序列为 $Y^{(0)}$, $Z^{*(1)} = \{z^{*(1)}(1), z^{*(1)}(2), \dots, z^{*(1)}(n)\}$ 为灰色 Verhulst 模型的背景值序列, 其中 $z^{*(1)}(k) = \beta y^{(1)}(k-1) + (1-\beta)y^{(1)}(k)$. 若 $X^{(1)}$ 近似满足 Logistic 函数的增长规律, 即

$$x^{(1)}(k) = \frac{1}{p + qe^{a(k-1)}},$$

则背景值 $z^{*(1)}(k)$ 中的权重

$$\beta = \frac{e^a}{e^a - 1} - \frac{1}{a}.$$

证明 设 $x^{(1)}(k) = \frac{1}{p + qe^{a(k+1)}}$, 则 $y^{(1)}(t) = \frac{1}{x^{(1)}(t)} = p + qe^{a(t-1)}$, 由背景值的几何意义可得

$$\begin{aligned} z^{*(1)}(k) &= \int_{k-1}^k y^{(1)}(t) dt = \int_{k-1}^k (p + qe^{a(t-1)}) dt = \\ &= p + \frac{q}{a} e^{a(k-2)}(e^a - 1). \end{aligned} \quad (7)$$

整理可得

$$z^{*(1)}(k) = p + qe^{a(k-2)}[\beta(1 - e^a) + e^a]. \quad (8)$$

由定理 1 可知, 式 (7) 和 (8) 相等, 化简可以得到

$$\beta = \frac{e^a}{e^a - 1} - \frac{1}{a}. \quad (9)$$

由此定理得证. \square

定理 2 表明, 当 $X^{(1)}$ 近似满足 Logistic 函数时, 背景值的权重与发展系数之间的数量关系为

$$\beta = \frac{e^a}{e^a - 1} - \frac{1}{a}.$$

性质 1 鉴于灰色 Verhulst 模型所描述的为倒 U 型序列, 其发展系数和背景值权重存在如下性质关系: 当 $a \rightarrow -\infty$ 时, $\beta \rightarrow 0$; 当 $a \rightarrow 0$ 时, $\beta \rightarrow 1/2$.

证明 由定理 2 可知, $\beta = \frac{e^a}{e^a - 1} - \frac{1}{a}$. 当 $a \rightarrow -\infty$ 时, 有

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^a}{e^a - 1} - \frac{1}{a} \right) = 0;$$

当 $a \rightarrow 0$ 时, $e^a \approx 1 + a$, 于是有

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{e^a}{e^a - 1} - \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{2}. \quad \square$$

定义 2 设满足 Verhulst 模型几何意义的真实背景值为

$$z_0^{(1)}(k) = \int_{k-1}^k x^{(1)} dt =$$

$$\beta_0 x^{(1)}(k-1) + (1-\beta_0)x^{(1)}(k).$$

其中: 参数 $\beta_0 \in [0, 1]$, $Z_1^{(1)}$ 为传统背景值序列, $z_1^{(1)}(k) = (x^{(1)}(k-1) + x^{(1)}(k))/2$, 称

$$R(k) = (z_0^{(1)}(k) - z_1^{(1)}(k))/z_0^{(1)}(k) \quad (10)$$

为背景值相对误差率.

性质 2 设序列 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$, 则传统 Verhulst 模型背景值 $z_1^{(1)}(k)$ 与真实背景值 $z_0^{(1)}(k) = \alpha_0 x^{(1)}(k-1) + (1-\alpha_0)x^{(1)}(k)$ 之间的相对误差率为

$$R(k) = \frac{(0.5 - \beta_0)x^{(0)}(k)}{x^{(1)}(k) - \beta_0 x^{(0)}(k)}. \quad (11)$$

证明 如定义 2, 设原始序列为 $X^{(0)}$, 其 1-AGO 为 $X^{(1)}$, 令 $z_1^{(1)}(k)$ 为传统 GM(1,1) 模型背景值, 以 $z_0^{(1)}(k)$ 为真实背景值, 代入式 (10), 得到

$$\begin{aligned} R(k) &= \frac{\beta_0 x^{(1)}(k-1) + (1-\beta_0)x^{(1)}(k)}{\beta_0 x^{(1)}(k-1) + (1-\beta_0)x^{(1)}(k)} - \\ &= \frac{[0.5x^{(1)}(k-1) + 0.5x^{(1)}(k)]}{\beta_0 x^{(1)}(k-1) + (1-\beta_0)x^{(1)}(k)}, \end{aligned}$$

其中 $k = 2, 3, \dots, n$. 整理后得到

$$\begin{aligned} R(k) &= \frac{(0.5 - \beta_0)[x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)]}{x^{(1)}(k) - \beta_0[x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)]} = \\ &= \frac{(0.5 - \beta_0)x^{(0)}(k)}{x^{(1)}(k) - \beta_0 x^{(0)}(k)}. \quad \square \end{aligned}$$

由以上定理和性质可知, 一次累加生成近似 Logistic 函数的灰序列发展系数 a 与真实背景值的参数 β_0 之间呈现非线性关系. 真实背景值与传统背景值之间的相对误差率随着发展系数的变化呈现以下变化规律:

$$\begin{cases} R(k) \rightarrow 0, & a \rightarrow 0, \beta_0 \rightarrow 1/2; \\ R(k) \rightarrow \frac{1}{2} \left[1 - \frac{x^{(1)}(k-1)}{x^{(1)}(k)} \right], & a \rightarrow -\infty, \beta_0 \rightarrow 0. \end{cases} \quad (12)$$

从式 (12) 可以看出: 当序列的发展系数较小时, 背景值的相对误差率较小, 表明低速增长时传统背景值表示的梯形面积与积分 $\int_{k-1}^k x^{(1)} dt$ 面积趋近, 这也解释了传统灰色 Verhulst 模型在预测低速增长序列时精度较高的原因, 但从背景值线性组合的参数上来看, 仍不满足建模时的无偏性和误差最小性的要求; 当发展系数较大时, 背景值的相对误差率较大, 系统误差较大, 难以对高速增长的序列进行建模预测.

1.3 拟合误差最小化的灰色 Verhulst 模型求解

将新的背景值构造代入式 (6), 则灰色 Verhulst 模型转化为

$$-y^{(0)}(k) + a[\beta y^{(1)}(k-1) + (1-\beta)y^{(1)}(k)] = b. \quad (13)$$

化简后可得

$$-(1 + a\beta)y^{(0)}(k) + ay^{(1)}(k) = b, \quad (14)$$

进而得到

$$y^{(0)}(k) - \frac{a}{(1 + a\beta)}y^{(1)}(k) = -\frac{b}{(1 + a\beta)}. \quad (15)$$

参数合并, 令 $a^* = a/(1 + a\beta)$, $b^* = b/(1 + a\beta)$, 则式

(12)变为

$$y^{(0)}(k) = a^*y^{(1)}(k) - b^* \quad (16)$$

称式(16)为灰色 Verhulst 模型的转化式.

定理 3 $X^{(1)}$ 为原始序列 $X^{(0)}$ 的 1-AGO, $Y^{(1)}$ 为 $X^{(1)}$ 的倒数字列, $r = (a^*, b^*)^T$ 为模型参数数列, 令

$$Y = \begin{bmatrix} y^{(0)}(2) \\ y^{(0)}(3) \\ \vdots \\ y^{(0)}(n) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} y^{(1)}(2) & -1 \\ y^{(1)}(3) & -1 \\ \vdots & \vdots \\ y^{(1)}(n) & -1 \end{bmatrix},$$

则灰色 Verhulst 模型转化式参数数列 $r = (a^*, b^*)^T$ 的最小二乘估计为 $\hat{r} = (\hat{a}^*, \hat{b}^*)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$.

证明略.

定理 4 设灰色 Verhulst 模型转化式背景值为 $z^{*(1)}(k) = \beta x^{(1)}(k-1) + (1-\beta)x^{(1)}(k)$, 参数数列 $r = (a^*, b^*)^T$ 的最小二乘估计值为 $\hat{r} = (B^T B)^{-1} B^T Y$ 时, 参数 a, b, β 满足最小二乘意义下的估计值, 分别表示为

$$\begin{cases} a = \ln\left(\frac{1}{1-\hat{a}^*}\right), \\ \beta = \frac{1}{\hat{a}^*} - \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{1-\hat{a}^*}\right)}, \\ b = \frac{\hat{b}^*}{\hat{a}^*} \ln\left(\frac{1}{1-\hat{a}^*}\right). \end{cases}$$

证明 由式(13)中 a, b, β 与 a^*, b^* 的关系, 根据定理 2 的结论可得方程组

$$\begin{cases} \hat{b}^* = \frac{b}{(1+a\beta)}, \\ \hat{a}^* = \frac{a}{(1+a\beta)}, \\ \beta = \frac{e^a}{e^a-1} - \frac{1}{a}. \end{cases}$$

解方程组, 得到

$$\begin{cases} a = \ln\left(\frac{1}{1-\hat{a}^*}\right), \\ \beta = \frac{1}{\hat{a}^*} - \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{1-\hat{a}^*}\right)}, \\ b = \frac{\hat{b}^*}{\hat{a}^*} \ln\left(\frac{1}{1-\hat{a}^*}\right). \end{cases} \quad \square$$

将参数估计值 \hat{a}, \hat{b} 代入灰色 Verhulst 模型的白化微分方程

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)} = b(x^{(1)}(t))^2,$$

求解微分方程, 得到模型的时间响应函数

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \frac{ax^{(1)}(1)}{bx^{(1)}(1) + (a - bx^{(1)}(1))e^{ak}} \quad (17)$$

离散化后得到灰色 Verhulst 模型的时间响应序列为

$$\hat{x}^{(1)}(t+1) = \frac{ax^{(1)}(1)}{bx^{(1)}(1) + (a - bx^{(1)}(1))e^{at}} \quad (18)$$

2 实例分析

2.1 背景值优化模型的特性验证

为了验证新背景值修正模型是否具备无偏性, 若 $X^{(1)}$ 为满足 Logistic 函数规律的序列, 则不失一般性, 令 $x^{(1)}(k+1) = \frac{1}{0.1544 + 0.0882e^{ak}}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. 分别取 $a = -0.8, -1.0, -1.2, -1.5$ 的情形进行模拟分析, 数据如表 1 所示.

表 1 一次累加生成近似满足 Logistic 函数的数据序列

k	a			
	-0.8	-1.0	-1.2	-1.5
0	4.122	4.122	4.122	4.122
1	5.1538	5.3519	5.5259	5.7445
2	5.8069	6.0119	6.1576	6.2976
3	6.1576	6.2976	6.3771	6.4358
4	6.3293	6.4096	6.4464	6.4675
5	6.4096	6.4518	6.4675	6.4746

按照本文的背景值优化方法分别建立灰色 Verhulst 模型, 经过计算, 结果如表 2 所示.

表 2 背景值优化模型无偏性检验表

a	二级参数		原始参数		相对误差/%
	a*	b*	a	a	
-0.8	-1.2255	-0.1892	-0.8000	-0.1235	0.00
-1.0	-1.7181	-0.2653	-1.0000	-0.1544	0.00
-1.2	-2.3201	-0.3582	-1.2000	-0.1853	0.00
-1.5	-3.4820	-0.5376	-1.5000	-0.2316	0.00

由表 2 中发展系数拟合结果可以发现, 本文背景值优化模型基本上完全拟合了一次累加生成序列近似于 Logistic 函数形式的原始序列, 发展系数的拟合值与真实值的相对误差为零, 说明了新背景值优化模型具备无偏性.

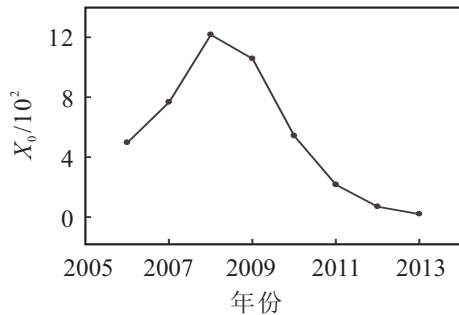
2.2 某型号小型飞机的研制费用模拟分析

随着我国经济快速发展对通用飞机需求的不断增大, 以及空域管理改革和低空空域开放步伐的加快, 为通用飞机的发展带来了新的市场机遇. 然而, 经历半个多世纪的发展, 我国飞机制造科研能力虽然有了一定的提升, 但与发达国家相比仍处于相对落后的地位. 为此, 我国政府制定了《民用航空工业中长期发展规划(2013-2020年)》, 加大了对通用航空产业的研发投入, 积极推动了通用航空产业的快速发展. 某型号小型飞机正是基于这样的背景提上了研制日程.

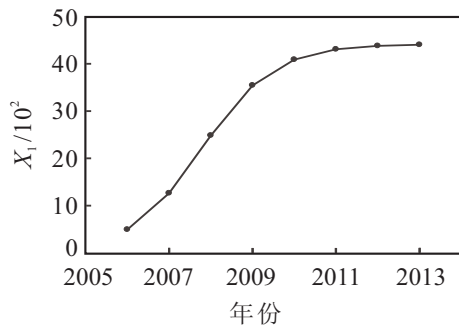
为了进一步说明本文优化模型的实用性以及对于含有噪声扰动序列仍能进行拟合的有效性, 下面利用本文提出的背景值优化模型对中国航空工业集团公司旗下某型号小型飞机的研制费用进行建模. 采用 2006~2013 年数据作为原始数据 $X^{(0)}$, 其 1-AGO 序列为 $X^{(1)}$. 原始数据见表 3, 图 1 分别描绘了原始序列 $X^{(0)}$ 及其一次累加生成序列 $X^{(1)}$ 的图形.

表 3 2006~2013 年某型号小型飞机的研制费用 万元

年份	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
比重/%	500	770	1220	1060	545	219	72	23



(a) 原始序列 X_0 的图形



(b) 一阶累加生成序列 X_1 的图形

图 1 某型号小型飞机研制费用原始序列和一阶累加生成序列图形

从图 1 中可以看出, 某型号小型飞机研制费用的原始数据呈现先增长再减小的单峰状态, 对原始数据进行一阶累加生成后, 序列总体趋势逐年提高, 达到一定时间后, 增速减缓, 呈现的是一种典型的发展受阻滞的现象. 对其数据的表象特征进行研究表明, 该序列比较适合于灰色 Verhulst 模型建模, 可以利用该数据对改进后的模型进行有效性和实用性的验证.

记表 3 中数据为 $X^{(0)}$, 其 1-AGO 为 $X^{(1)}$, 建立灰色 Verhulst 模型. 首先根据定理 3 进行参数估计, 得 $a^* = -2.16279$, $b^* = -0.00049$; 再由定理 4 求得原始参数 $a = -1.15146$, $b = -0.00026$, $\beta = -0.406101$; 最后计算得到时间响应式为

$$\hat{x}^{(1)}(t+1) = \frac{575.72782}{0.130085 + 1.02137e^{-1.15146t}}$$

作为对比, 对原始数据分别按照传统灰色 Verhulst 和文献 [10] 背景值优化的灰色 Verhulst 模型进行建模. 记传统灰色 Verhulst 模型为模型 1, 文献 [10] 背景值优化的灰色 Verhulst 模型为模型 2, 本文背景值优化的灰色 Verhulst 模型为模型 3, 这 3 种模型的模拟和预测结果见表 4.

从表 4 中可以看出, 模型 3 的拟合精度最高, 平均相对误差为 1.13%, 相对于模型 1 和模型 2 平均误差最低, 表明本文的背景值优化方法实现了噪声扰动下序列模拟误差最小, 在实际应用中的模拟效果优于传统灰色 Verhulst 模型和文献 [10] 提出的背景值优化模型. 而传统灰色 Verhulst 建模方法和文献 [10] 中背景值优化方法得到的平均误差较大, 原因在于发展系数较大, 当序列数据变换波动较大时, 序列中所含噪声扰动因素作用效果较强, 传统模型和文献 [10] 的背景值构建方法受噪声作用偏离真实背景值幅度较大, 因而模拟效果会受到一定的影响.

另外, 从拟合序列相似程度进行检验, 对比拟合序列与原始序列的形状相似程度, 以此作为可否进行预测的依据, 保证建模得到的拟合序列与原始序列保持趋势的一致性. 选择绝对关联度作为拟合序列和原始序列形状相似性的判断依据, 计算公式如下:

$$|s_0| = \sum_{k=2}^{n-1} |x_0^0(k)| + \frac{1}{2}|x_0^0(n)|,$$

$$|s_j| = \sum_{k=2}^{n-1} |x_j^0(k)| + \frac{1}{2}|x_j^0(n)|,$$

$$|s_j - s_0| = \sum_{k=2}^{n-1} |x_j^0(k) - x_0^0(k)| + \frac{1}{2}|x_j^0(n) - x_0^0(n)|,$$

其中 X_0^0 和 X_j^0 分别为序列 X_0 和 X_j 的始点零化像, 则关联度计算公式为

$$\gamma_{0j} = \frac{1 + |s_0| + |s_j|}{1 + |s_0| + |s_j| + |s_j - s_0|}$$

表 4 3 个模型对序列 $X^{(1)}$ 的模拟值、预测值和相对误差

k	实际值	模型 1		模型 2		模型 3	
	$x^{(1)}(k)$	$\hat{x}^{(1)}(k)$	相对误差/%	$\hat{x}^{(1)}(k)$	相对误差/%	$\hat{x}^{(1)}(k)$	相对误差/%
2006	500	500	0.00	500	0.00	500	0.00
2007	770	734.794	4.57	717.783	6.78	770.8708	0.11
2008	1220	1154.84	5.34	1269.606	4.07	1208.693	0.93
2009	1060	1061.372	0.13	1027.31	3.08	1066.252	0.59
2010	545	590.268	8.31	638.6263	17.18	557.9518	2.38
2011	219	240.857	9.98	249.5819	13.96	214.8599	1.89
2012	72	85.603	18.89	87.68246	21.78	72.69375	0.96
2013	23	28.904	25.67	27.79651	20.85	23.49596	2.16
模拟值平均相对误差/%		9.11		10.96		1.13	

经计算,得到本文优化模型与原始序列的绝对关联度为 0.9929,而传统灰色 Verhulst 模型和文献 [10] 模型得到的拟合序列与原始序列之间的绝对关联度分别为 0.9642 和 0.9485。由此可知,相对于传统模型和文献 [10] 的模型,本文模型对序列特征的描述更为精准,用于预测的可行性更高。

3 结 论

本文从传统灰色 Verhulst 模型的建模过程入手,分析得到背景值的构造方式是影响灰色 Verhulst 模型的模拟预测精度的关键因素之一;从背景值的几何意义出发,利用积分中值定理拟合真实背景值,发现背景值与发展系数之间存在一定的数量关系,并据此构建新的背景值优化灰色 Verhulst 模型,它能保证背景值优化模型的无偏性,有效减小因序列噪声扰动所产生的误差,使得最小二乘意义下参数 a 、 b 的估计误差最小,进而提高模型精度。本文应用新的背景值优化模型对某型号小型飞机的研制费用数据进行建模,并与传统灰色 Verhulst 模型、文献 [10] 的背景值优化模型进行了对比。结果显示:本文方法显著地改善了拟合效果;同时,采用绝对关联度分析表明,本文模型对原始序列信息描述精确,更适合于研制费用的预测。

参考文献(References)

- [1] 邓聚龙. 灰色论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 2-5.
(Deng J L. The basis of grey theory[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science & Technology, 2002: 2-5.)
- [2] 曾祥燕, 肖新平. 模型的改进及其适用范围[J]. 系统工程, 2009, 27(1): 103-107.
(Zeng X Y, Xiao X P. Improvement of model and its application region[J]. Systems Engineering, 2009, 27(1): 103-107.)
- [3] 张彬, 西桂权. 基于背景值和边值修正的模型优化[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(3): 682-688.
(Zhang B, Xi G Q. Model optimization based on the background value and boundary value correction[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2013, 33(3): 682-688.)
- [4] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及应用[M]. 第 5 版. 北京: 科学出版社, 2010: 173-177.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Grey system theory and its application[M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2010: 173-177.)
- [5] 邓晖, 赵晋泉, 柳勇军, 等. 基于改进灰色 Verhulst 模型的受扰轨迹实时预测方法[J]. 电力系统保护与控制, 2012, 40(9): 18-29.
(Deng H, Zhao J Q, Liu Y J, et al. A novel post-fault rotor-

- angle trajectory prediction method based on modified gray Verhulst model[J]. Power System Protection and Control, 2012, 40(9): 18-29.)
- [6] Peleg M, Corradini M G, Normand M D. The logistic (Verhulst) model for sigmoid microbial growth curves revisited[J]. Food Research International, 2007, 40(7): 808-818.
- [7] Gross T J, Abrao T, Jeszensky P J E. Distributed power control algorithm for multiple access systems based on Verhulst model[J]. AEU-Int J of Electronics and Communications, 2011, 65(4): 361-372.
- [8] 何文章, 吴爱弟. 估计 Verhulst 模型中参数线性规划方法及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2006, 26(8): 141-144.
(He W Z, Wu A D. Estimation of Verhulst model parameter based on linear programming[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2006, 26(8): 141-144.)
- [9] 王正新, 党耀国, 刘思峰. 无偏灰色 Verhulst 模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(10): 138-144.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. Unbiased grey Verhulst model and its application[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2009, 29(10): 138-144.)
- [10] 熊萍萍, 党耀国, 姚天祥, 等. 灰色 Verhulst 模型背景值优化的建模方法研究[J]. 中国管理科学, 2012, 20(6): 154-159.
(Xiong P P, Dang Y G, Yao T X, et al. The research on the modeling method of background value optimization in grey Verhulst model[J]. Chinese J of Management Science, 2012, 20(6): 154-159.)
- [11] 刘威, 徐伟. 灰色 Verhulst 模型参数估计的一种新算法[J]. 计算机仿真, 2008, 25(11): 119-123.
(Liu W, Xu W. A new algorithm for estimating parameters of grey Verhulst model[J]. Computer Simulation, 2008, 25(11): 119-123.)
- [12] Xiong P P, Dang Y G, Qian W Y. The optimization of time response function in non-equidistant Verhulst model[J]. J of Grey System, 2010, 22(3): 249-256.
- [13] 崔杰, 刘思峰, 曾波, 等. 灰色 Verhulst 预测模型的数乘特性[J]. 控制与决策, 2013, 28(4): 605-608.
(Cui J, Liu S F, Zeng B, et al. Parameters characteristics of grey Verhulst prediction model under multiple transformation[J]. Control and Decision, 2013, 28(4): 605-608.)
- [14] 杨德岭, 刘思峰, 曾波. 基于核和信息域的区间灰数 Verhulst 模型[J]. 控制与决策, 2013, 28(2): 264-268.
(Yang D L, Liu S F, Zeng B. Verhulst model of interval grey number based on kernel and information field[J]. Control and Decision, 2013, 28(2): 264-268.)