第 30 卷 第 11 期
Vol. 30 No. 11

控 制 与 决 策
Control and Decision

2015 年 11 月
Nov. 2015

文章编号: 1001-0920 (2015) 11-2093-04 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2014.1246

新型灰色 Verhulst 预测模型的参数特性

崔 杰[1,2], 刘思峰[1], 赵 磊[2]

(1. 南京航空航天大学 灰色系统研究所，南京 210016；2. 淮阴工学院 管理工程学院，江苏 淮安 223003)

摘 要: 在灰色 Verhulst 模型建模机理的基础上, 考虑相关因素对系统预测精度的影响, 构建一种新型灰色 Verhulst 模型. 分析该模型参数在系统特征序列与相关因素序列经数乘变换前后的量化关系, 并分析数乘变换对该新模型建模精度的影响程度. 研究结果表明, 新型灰色 Verhulst 模型的建模精度与系统相关因素序列的数乘变换有关, 而与系统特征序列的数乘变换无关. 研究结论认为, 利用数乘变换可降低该模型的建模复杂性.

关键词: 灰色预测模型；灰色 Verhulst 模型；累加生成；数乘变换

中图分类号: N941.5 **文献标志码:** A

Parameter characteristics of novel grey Verhulst prediction model

CUI Jie[1,2], *LIU Si-feng*[1], *ZHAO Lei*[2]

(1. The Institute for Grey Systems Studies，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016，China; 2. Faculty of Management and Engineering，Huaiyin Institute of Technology，Huaian 223003，China．Correspondent: CUI Jie，E-mail：nuaacui2008@163.com)

Abstract: On the basis of the modeling mechanism of the grey Verhulst model, a novel grey Verhulst model is constructed considering related factors affecting forecasting precision of a system, and the quantitative relation of model parameters as multiple transformations acting on system characteristic sequences and its related factors sequences are analyzed. Research results show that the modeling accuracy of the novel grey Verhulst model is in relation to multiple transformation of related factors sequence of systems, but it has nothing to do with the multiple transformation of characteristics sequence of systems. Research condusion shows that multiple transformations can simplify the complexity of constructing the novel model.

Keywords: grey forecasting model；grey Verhulst model；accumulation generation；multiple transformations

0 引 言

在灰色系统理论中, 灰色预测模型一直是备受关注的分支之一[1-3]. 为提高模型的建模精度, 通常需对系统原始数据序列进行预处理[4-5]. 目前, 学界已有部分学者对灰色预测模型的参数特性进行研究, 并取得了丰硕成果[6-12]. 研究表明, 在灰建模之前, 对系统特征序列进行线性变换, 可降低灰预测模型建模的复杂性. 在众多灰预测模型中, 灰色 Verhulst 预测模型是一种针对特征序列具有近似单峰特性的系统进行小样本建模的特殊灰色预测模型, 该模型虽然在商品经济寿命预测、生物生长演变分析等领域具有一定的应用空间, 但由于其存在无法对系统内相关影响因素信息进行充分利用的缺陷, 通常难以取得理想的建模效果.

本文在传统灰色 Verhulst 模型建模机理的基础上, 考虑系统相关因素对系统特征序列发展趋势的影响, 构建一种嵌入相关因素的新灰色 Verhulst 预测模型 (简称 NGM(1,1,V) 模型). 给出该模型的时间响应式, 利用参数包技术分析该模型参数在系统特征序列与其相关因素序列经数乘变换前后的数量关系, 揭示该模型精度在建模序列数乘变换前后的变化规律. 研究结果表明, 所提出模型的建模精度与系统相关因素序列的数乘变换有关, 而与系统特征序列的数乘变换无关.

1 NGM(1,1,V) 模型的定义

定义 1 设原始非负序列为

$$X_1{}^{(0)} = \{x_1{}^{(0)}(1), x_1^{(0)}(2), \cdots, x_1^{(0)}(n)\}.$$

其中: $x_1{}^{(0)}(i) \geqslant 0,\ k = 1, 2, \cdots, n$. $X_1{}^{(0)}$ 的一次累加生成序列为

收稿日期: 2014-08-12；**修回日期:** 2015-01-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71301060)；教育部人文社会科学青年基金项目(13YJC630109)；教育部人文社会科学规划基金项目(12YJA630122)；江苏省“青蓝工程”人才专项基金项目(2014).

作者简介: 崔杰(1978−), 男, 副教授, 博士后, 从事灰色系统理论、系统预测与决策方法的研究；刘思峰(1955−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论、数量经济学等研究.

$$X_1{}^{(1)} = \{x_1^{(1)}(1), x_1{}^{(1)}(2), \cdots, x_1{}^{(1)}(n)\}.$$

其中: $x_1{}^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^{k} x_1{}^{(0)}(i),\ k = 1, 2, \cdots, n.$ 系统某一相关因素序列为

$$X_2{}^{(0)} = \{x_2{}^{(0)}(1), x_2{}^{(0)}(2), \cdots, x_2{}^{(0)}(n)\}.$$

其中: $x_2{}^{(0)}(i) \geqslant 0,\ k = 1, 2, \cdots, n.$ 其一次累加生成序列为

$$X_1{}^{(1)} = \{x_2{}^{(1)}(1), x_2{}^{(1)}(2), \cdots, x_2{}^{(1)}(n)\}.$$

其中: $x_2{}^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^{k} x_2{}^{(0)}(i),\ k = 1, 2, \cdots, n.$ $X_1{}^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列为

$$Z_1{}^{(1)} = \{z_1{}^{(1)}(1), z_1{}^{(1)}(2), \cdots, z_1{}^{(1)}(n)\}.$$

其中

$$z_1{}^{(1)}(k) = \frac{1}{2}(x_1{}^{(1)}(k) + x_1{}^{(1)}(k+1)),$$
$$k = 2, 3, \cdots, n.$$

称 $x_1{}^{(0)}(k) + az_1{}^{(1)}(k) = b_2(x_2{}^{(1)}(k))^2$ 为新灰色 Verhulst 预测模型 (简称为 NGM(1,1,V) 模型), 该模型的白化模型为

$$\frac{\mathrm{d}x_1{}^{(1)}}{\mathrm{d}t} + ax_1{}^{(1)} = b_2(x_2{}^{(1)})^2.$$

经数学证明, 得到模型对应的白化响应式为

$$x_1{}^{(1)}(t) = \frac{b_2 x_2{}^{(1)}(t)}{a} + \Big(x_1{}^{(1)}(1) - \frac{b_2 x_2{}^{(1)}(1)}{a}\Big)\Big(\frac{x_2{}^{(1)}(t)}{x_2{}^{(1)}(1)}\Big)^2 e^{a(1-t)}.$$

称 (a, b_2) 为 NGM(1,1,V) 模型的一级参数包, 记作 P_{IV}, 可以表示为如下向量形式:

$$P_{IV} = \begin{bmatrix} a \\ b_2 \end{bmatrix} \text{ or } P_{IV} = [a\ \ b_2]^{\mathrm{T}}.$$

称 (a, b_2) 的构成成分为 NGM(1,1,V) 模型的中间参数, 中间参数的全体为该模型的二级参数包, 记作 P_{IIV}.

称 NGM(1,1,V) 模型的二级参数包的构成成分为基本参数, 基本参数全体为该模型的三级参数包, 记作 P_{IIIV}.

命题 1 NGM(1,1,V) 模型的一级参数包在最小二乘准则下有如下矩阵算式:

$$P_I = \begin{bmatrix} a \\ b_2 \end{bmatrix} = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y.$$

其中

$$Y = \begin{bmatrix} x_1{}^{(0)}(2) \\ x_1{}^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x_1{}^{(0)}(n) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -z_1{}^{(1)}(2) & (x_2{}^{(1)}(2))^2 \\ -z_1{}^{(1)}(3) & (x_2{}^{(1)}(3))^2 \\ \vdots & \vdots \\ -z_1{}^{(1)}(n) & (x_2{}^{(1)}(n))^2 \end{bmatrix}.$$

命题 2 令

$$C_V = \sum_{k=2}^{n} z_1{}^{(1)}(k) x_2^{(1)}(k)^2,$$

$$E = \sum_{k=2}^{n} z_1{}^{(1)}(k) x_1{}^{(0)}(k),$$

$$F = \sum_{k=2}^{n} z_1{}^{(1)}(k)^2,\ G = \sum_{k=2}^{n} x_2{}^{(1)}(k)^4,$$

$$H = \sum_{k=2}^{n} x_1{}^{(0)}(k) x_2{}^{(1)}(k)^2.$$

有

$$(B^{\mathrm{T}}B)^{-1} = \frac{1}{FG - C_V{}^2}\begin{bmatrix} G & C_V \\ C_V & F \end{bmatrix},$$

$$B^{\mathrm{T}}Y = \begin{bmatrix} -E \\ H \end{bmatrix}.$$

命题 3 灰色 NGM(1,1,V) 模型的参数包有:

1) 一级参数包 P_{IV} 为

$$P_{IV} = [a\ \ b_2]^{\mathrm{T}},$$
$$a = \frac{C_V H - GE}{FG - C_V{}^2},$$
$$b = \frac{FH - C_V E}{FG - C_V{}^2}.$$

2) 二级参数包 P_{IIV} 为

$$C_V = \sum_{k=2}^{n} z_1{}^{(1)}(k) x_2^{(1)}(k)^2,$$

$$E = \sum_{k=2}^{n} z_1{}^{(1)}(k) x_1{}^{(0)}(k),$$

$$F = \sum_{k=2}^{n} z_1{}^{(1)}(k)^2,$$

$$G = \sum_{k=2}^{n} x_2{}^{(1)}(k)^4,$$

$$H = \sum_{k=2}^{n} x_1{}^{(0)}(k) x_2{}^{(1)}(k)^2.$$

3) 三级参数包 P_{IIIV} 为

$$P_{IIIV} = (x_1{}^{(0)}(k), z_1{}^{(1)}(k), x_2{}^{(1)}(k)).$$

2 NGM(1,1,V) 模型的参数特性

定义 2 对于非负数据序列 x_k 和 y_k, $y_k = \rho x_k$, $k = 1, 2, \cdots, n$, $\rho > 0$ 为常数, 称为数乘变换, ρ 为数乘量.

下面分析数乘变换对 NGM(1,1,V) 模型建模参数和精度的影响. 设 $X_1{}^{(0)}$ 为原始非负数据序列, $Y_1{}^{(0)}$

为数乘变换数据序列, ${X_1}^{(1)}$ 和 ${Y_1}^{(1)}$ 分别为 ${X_1}^{(0)}$ 和 ${Y_1}^{(0)}$ 的 1– AGO, ${X_2}^{(0)}$ 为系统相关因素数据序列, ${Y_2}^{(0)}$ 为数乘变换数据序列, ${X_2}^{(1)}$ 和 ${Y_2}^{(1)}$ 分别为 ${X_2}^{(0)}$ 和 ${Y_2}^{(0)}$ 的 1– AGO, ρ_1、ρ_2 依次为系统特征序列与相关因素序列的数乘量, 有

$$y_1{}^{(1)}(k)=\rho_1x_1{}^{(1)}(k),$$
$$y_2{}^{(1)}(k)=\rho_2x_2{}^{(1)}(k).$$

记参数 a、b_2 为利用序列 ${X_1}^{(0)}$ 和 ${X_2}^{(0)}$ 构建的 NGM(1,1,V) 模型参数, $\bar{a}$、$\bar{b}_2$ 为其数乘序列构建的模型参数, 其他参数的定义类似.

定理 1　二级参数包 P_{IIV} 为

$$P_{IIV}=(C_V,E,F,G,H),$$

则有

$$\bar{C}_V=\rho_1{\rho_2}^2C_V,\ \bar{E}={\rho_1}^2E,\ \bar{F}={\rho_1}^2F,$$
$$\bar{G}={\rho_2}^4G,\ \bar{H}=\rho_1{\rho_2}^2H.$$

证明　存在

$$\bar{C}_V=\sum_{k=2}^{n}\rho_1{\rho_2}^2z_1{}^{(1)}(k)x_2^{(1)}(k)^2=\rho_1{\rho_2}^2C_V,$$
$$E=\sum_{k=2}^{n}{\rho_1}^2z_1{}^{(1)}(k)x_1{}^{(0)}(k)={\rho_1}^2E,$$
$$F=\sum_{k=2}^{n}{\rho_1}^2z_1{}^{(1)}(k)^2={\rho_1}^2F,$$
$$G=\sum_{k=2}^{n}{\rho_2}^4x_2{}^{(1)}(k)^4={\rho_2}^4G,$$
$$H=\sum_{k=2}^{n}\rho_1\rho_2^2x_1{}^{(0)}(k)x_2{}^{(1)}(k)^2=\rho_1\rho_2^2H.\qquad\square$$

定理 2　记参数 a、b_2 为利用序列 ${X_1}^{(0)}$ 和 ${X_2}^{(0)}$ 构建的 NGM(1,1,V) 模型参数, $\bar{a}$、$\bar{b}_2$ 为利用其数乘序列构建模型对应的参数, 则有

$$\bar{a}=a,\ \bar{b}_2=\rho_1b_2/\rho_2^2.$$

证明　存在

$$\bar{a}=\frac{\bar{C}_V\bar{H}-\bar{G}\bar{E}}{\bar{F}\bar{G}-\bar{C}_V^2}=\frac{{\rho_1}^2{\rho_2}^4C_VH-GE}{{\rho_1}^2{\rho_2}^4FG-{C_V}^2}=\frac{C_VH-GE}{FG-{C_V}^2}=a,$$
$$\bar{b}=\frac{\bar{F}\bar{H}-\bar{C}_V\bar{E}}{\bar{F}\bar{G}-\bar{C}_V^2}=\frac{{\rho_1}^3{\rho_2}^2FH-C_VE}{{\rho_1}^2{\rho_2}^4FG-{C_V}^2}=\frac{\rho_1FH-C_VE}{{\rho_2}^2(FG-{C_V}^2)}=\frac{\rho_1b}{{\rho_2}^2}.\qquad\square$$

定理 3　设 $\hat{x}_1^{(0)}(k)$、$\hat{y}_1^{(0)}(k)$ 依次为序列 ${X_1}^{(0)}$、${X_2}^{(0)}$ 和 ${Y_1}^{(0)}$、${Y_2}^{(0)}$ 构建的 NGM(1,1,V) 模型的模拟预测值. 若相关因素序列数乘量 $\rho_2=1$, 则有

$$\hat{y}_1^{(1)}(k)=\rho_1\hat{x}_1^{(1)}(k),\ \hat{y}_1^{(0)}(k)=\rho_1\hat{x}_1^{(0)}(k).$$

证明　存在

$$\hat{y}_1^{(1)}(k)=\frac{\frac{\rho_1b_2}{\rho_2}x_2{}^{(1)}(k)}{a}+\left(\rho_1x_1{}^{(1)}(1)-\frac{\frac{\rho_1b_2}{\rho_2}x_2{}^{(1)}(1)}{a}\right)\left(\frac{\rho_2x_2{}^{(1)}(t)}{\rho_2x_2{}^{(1)}(1)}\right)^2e^{a(1-k)}=$$
$$\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{b_2x_2{}^{(1)}(k)}{a}+\left(\rho_2x_1{}^{(1)}(1)-\frac{b_2x_2{}^{(1)}(1)}{a}\right)\left(\frac{x_2{}^{(1)}(t)}{x_2{}^{(1)}(1)}\right)^2e^{a(1-k)})=$$
$$\rho_1\hat{x}^{(1)}(k),$$
$$\hat{y}_1^{(0)}(k)=\hat{y}_1^{(1)}(k)-\hat{y}_1^{(1)}(k-1)=\rho_1\hat{x}_1^{(0)}(k),$$

故

$$\hat{y}_1^{(1)}(k)=\rho_1\hat{x}_1^{(1)}(k),\ \hat{y}_1^{(0)}(k)=\rho_1\hat{x}_1^{(0)}(k).\qquad\square$$

定理 4　记 $\varepsilon(k)$、$\bar{\varepsilon}(k)$ 依次为序列 ${X_1}^{(0)}$、${X_2}^{(0)}$ 和 ${Y_1}^{(0)}$、${Y_2}^{(0)}$ 构建的 NGM(1,1,V) 模型的相对误差, 即

$$\varepsilon(k)=\frac{x_1{}^{(0)}(k)-\hat{x}_1^{(0)}(k)}{x_1{}^{(0)}(k)},$$
$$\bar{\varepsilon}(k)=\frac{y_1{}^{(0)}(k)-\hat{y}_1^{(0)}(k)}{y_1{}^{(0)}(k)},$$

则有

$$\varepsilon(k)=\bar{\varepsilon}(k),\ k=2,3,\cdots,n.$$

证明　由定义 2 和定理 3 可得

$$\bar{\varepsilon}(k)=\frac{y_1{}^{(0)}(k)-\hat{y}_1^{(0)}(k)}{y_1{}^{(0)}(k)}=\frac{\rho_1x_1{}^{(0)}(k)-\rho_1\hat{x}_1^{(0)}(k)}{\rho_1x_1{}^{(0)}(k)}=\varepsilon(k).\qquad\square$$

3　数值分析

2007～2013 年期间, 某区域城市道路网交通事故造成的死亡人数构成的序列为

$$X_1{}^{(0)}=3.1,5.2,7.5,12.2,15.8,13.1,11.5,$$

单位: 百人. 该区域机动车总量构成的序列为

$$X_2{}^{(0)}=1.23,1.45,1.83,2.22,2.93,3.38,4.12,$$

单位: 万辆. 下面利用序列 ${X_1}^{(0)}$ 和 ${X_2}^{(0)}$ 及其数乘序列分别构建 NGM(1,1,V) 模型, 进一步验证本文的研究结论.

根据定义 1, 通过计算可得建模参数

$$a=-0.71,\ b_2=-0.11.$$

故有

$$x_1{}^{(1)}(k)=\frac{b_2x_2{}^{(1)}(k)}{a}+\left(x_1{}^{(1)}(1)-\frac{b_2x_2{}^{(1)}(1)}{a}\right)\left(\frac{x_2{}^{(1)}(k)}{x_2{}^{(1)}(1)}\right)^2e^{a(1-k)}=$$

$0.15{x_2}^{(1)}(k)+1.92({x_2}^{(1)}(k))^2e^{0.71(k-1)}$.

对序列 ${X_1}^{(0)}$ 作数乘变换, 数乘量 $\rho_1=0.1$, 序列 ${X_2}^{(0)}$ 保持不变, 即 $\rho_2=1$. 变换后构建的模型参数为 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}_2$, 通过计算得到 $\bar{a}=-0.71, \bar{b}_2=-0.011$. 故定理 1 和定理 2 成立, 有

$$\hat{y}_1^{(1)}(k)=\frac{\frac{\rho_1 b_2}{\rho_2}{x_2}^{(1)}(k)}{a}+\Big(\rho_1{x_1}^{(1)}(1)-\frac{\frac{\rho_1 b_2}{\rho_2}{x_2}^{(1)}(1)}{a}\Big)\Big(\frac{\rho_2{x_2}^{(1)}(t)}{\rho_2{x_2}^{(1)}(1)}\Big)^2e^{a(1-k)}=$$
$$0.015{x_2}^{(1)}(k)+0.192({x_2}^{(1)}(k))^2e^{0.11(k-1)},$$

即

$$\hat{y}_1^{(1)}(k)=0.1\hat{x}_1^{(1)}(k),$$
$$\hat{y}_1^{(0)}(k)=\hat{y}_1^{(1)}(k)-\hat{y}_1^{(1)}(k-1)=0.1\hat{x}_1^{(0)}(k),$$
$$\bar{\varepsilon}(k)=\frac{{y_1}^{(0)}(k)-\hat{y}_1^{(0)}(k)}{{y_1}^{(0)}(k)}=\frac{0.1{x_1}^{(0)}(k)-0.1\hat{x}_1^{(0)}(k)}{0.1{x_1}^{(0)}(k)}=\varepsilon(k).$$

上述计算结果进一步证明了研究结论.

4 结 论

本文在传统灰色 Verhulst 模型的基础上, 提出了一种新的灰色 Verhulst 模型, 即 NGM(1,1,V) 模型, 并给出其时间响应函数. 对系统特征序列与相关因素序列经过数乘变换前后模型参数的量化关系及其精度的变化规律进行了深入分析, 采用数值计算对研究结论进行进一步验证. 研究结果显示, NGM(1,1,V) 模型的建模精度与系统相关因素序列的数乘变换有关, 但与系统原始特征序列的数乘变换无关. 因此, 在构造该新模型的过程中, 可保持相关因素序列不变, 对系统特征序列进行数乘变换预处理, 从而简化其建模过程.

参考文献(References)

[1] Deng Julong. Introduction to grey system theory[J]. The J of Grey System, 1989, 1(1): 1-26.

[2] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 35-41.
(Deng J L. The basis of grey theory[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science Technology, 2002: 35-41.)

[3] 张岐山. 提高灰色 GM(1,1) 模型精度的微粒群方法[J]. 中国管理科学, 2007, 15(5): 126-129.
(Zhang Q S. Improving the precision of GM(1,1) model by using particle swarm optimization[J]. Chinese J of Management Science, 2007, 15(5): 126-129.)

[4] Fariborz Rahimnia, Mahdi Moghadasian, Ebrahim Mashreghi. Application of grey theory approach to evaluation of organizational vision[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2011, 1(1): 33-46.

[5] Cheng-Hsiung Hsieh, Ching-Hua Liu, Kuan-Chieh Hsiung, et al. Grey temporal error concealment[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2011, 1(2): 138-147.

[6] Wang Yuhong, Tang Jiangrong, Cao Wenbin. Grey prediction model-based food security early warning prediction[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2012, 2(1): 13-23.

[7] Lin Yi, Liu Sifeng. A systemic analysis with data(II)[J]. Int J of General Systems, 2000, 29(6): 1001-1011.

[8] 肖新平, 邓聚龙. 数乘变换下 GM(0,N) 模型中的参数特征[J]. 系统工程与电子技术, 2000, 22(10): 1-3.
(Xiao X P, Deng J L. Parameter characteristics of GM(0,N) model under multiple transformation[J]. Systems Engineering and Electronic, 2000, 22(10): 1-3.)

[9] 谢乃明, 刘思峰. 离散灰色模型的仿射特性研究[J]. 控制与决策, 2008, 23(2): 200-203.
(Xie N M. Liu S F. Research on the affine properties of discrete grey model[J]. Control and Decision, 2008, 23(2): 200-203.)

[10] Cui Jie, Liu Sifeng, Zeng Bo, et al. A novel grey forecasting model and its optimization[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(6): 4399-4406.

[11] Li Xican. On parameter in grey model GM(1,1)[J]. The J of Grey System, 1998, 10(2): 155-162.

[12] 崔杰, 刘思峰, 曾波, 等. 灰色 Verhulst 预测模型的数乘特性[J]. 控制与决策, 2013, 28(4): 605-608.
(Cui J, Liu S F, Zeng B, et al. Parameters characteristics of Grey Verhulst prediction model under multiple transformations[J]. Control and Decision, 2013, 28(4): 605-608.)

(责任编辑：郑晓蕾)