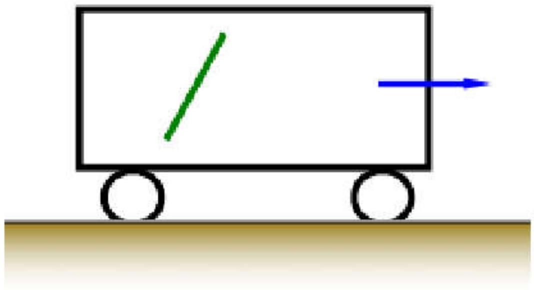
第七章

刚体的简单运动

§7-1　刚体的平行移动

1、定义

刚体内任一直线在运动过程中始终平行于初始位置，这种运动称为平行移动，简称平移。

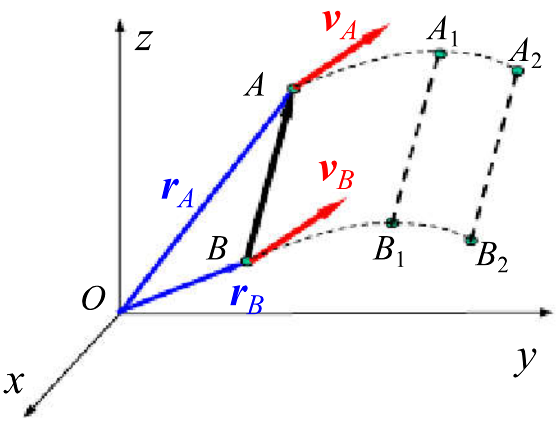


直线行驶的列车车厢

2、运动方程

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \overrightarrow{AB}$$

3、速度和加速度分布



因为 $$\frac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{AB}\right)}{\mathrm{d}t} = 0$$

所以 $$\vec{v}_A = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_B}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_B \qquad \vec{a}_A = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_B}{\mathrm{d}t} = \vec{a}_B$$

结论： 当刚体平行移动时，其上各点的轨迹形状相同；在每一瞬时，各点的速度相同，加速度也相同。

刚体平移→点的运动

§7-2　刚体绕定轴的转动

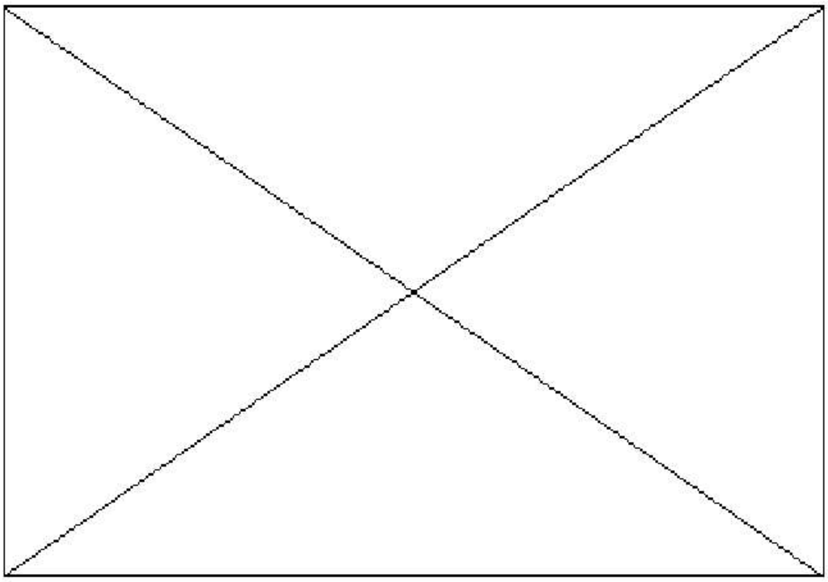
1、定义

刚体在运动时，其上(或其扩展部分)有**两点保持不动**，则这种运动称为刚体绕**定轴转动**，简称刚体的转动。

转轴： 两点连线

转角： φ

单位： 弧度(rad)

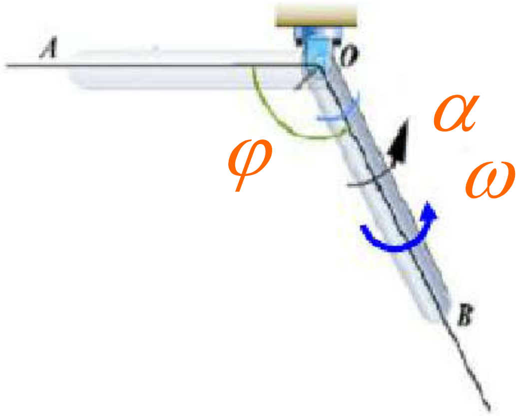


2、运动方程

$$\varphi = f(t)$$

§ 7-2 刚体绕定轴的转动

3、角速度和角加速度



(1) 角速度　是代数量

大小：$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$

方向：逆时针转动为正

单位：*rad/s* (弧度/秒)

(2) 角加速度　$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$

单位: rad/s² (弧度/秒²)

(3) 匀速转动

$$\omega = \text{Const} \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \varphi = \varphi_0 + \omega t$$

工程上常用转速n来表示刚体转动的快慢。n的单位是转/分(r/min)， w与n的转换关系为

$$\omega = \frac{2\pi}{60} n = \frac{\pi}{30} n$$

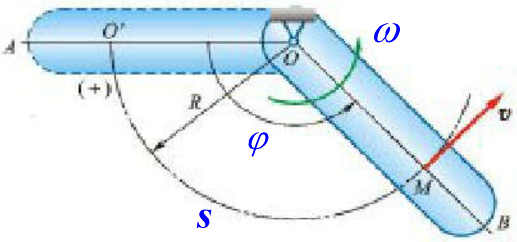
(4) 匀变速转动

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \text{cont} \qquad \omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

§ 7-3 转动刚体内各点的速度和加速度

1、点的运动方程

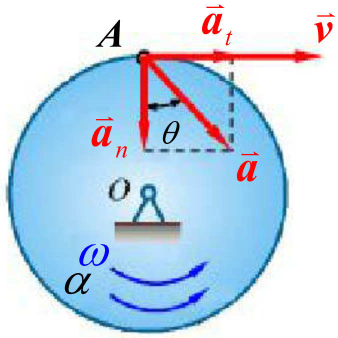


$$s = R\varphi$$

2、速度

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = R\omega$$

3、加速度



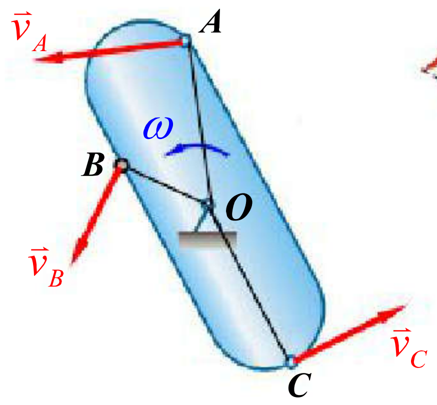
$$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathbf{d}v}{\mathbf{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = R\alpha$$

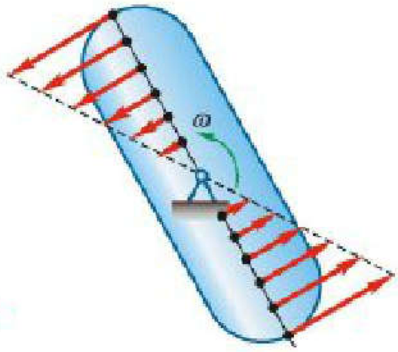
$$a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{1}{R}(R\omega)^2 = R\omega^2$$

$$a = \sqrt{a_{\mathrm{t}}^2 + a_{\mathrm{n}}^2} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \qquad \tan\theta = \frac{a_{\mathrm{t}}}{a_{\mathrm{n}}} = \frac{\alpha}{\omega^2}$$

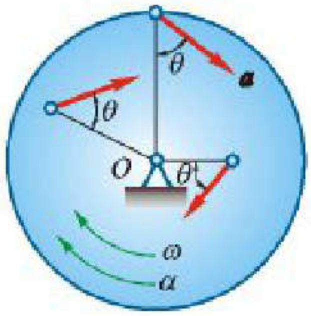
§7-3 转动刚体内各点的速度和加速度

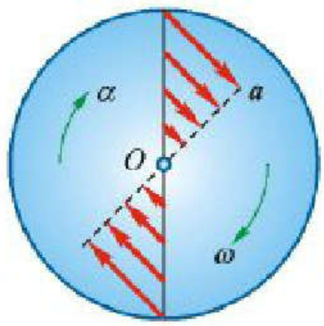
4、速度与加速度分布图





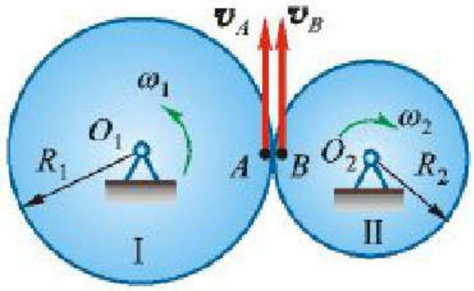
$$v = R\omega$$





1、齿轮传动

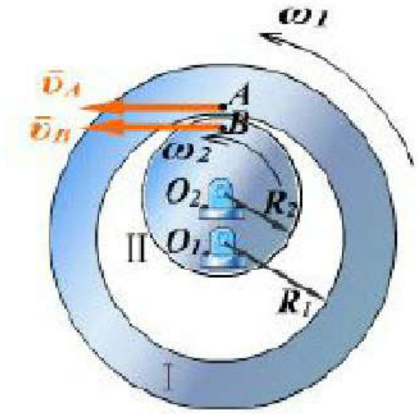
① 啮合条件



$$v_A = v_B$$

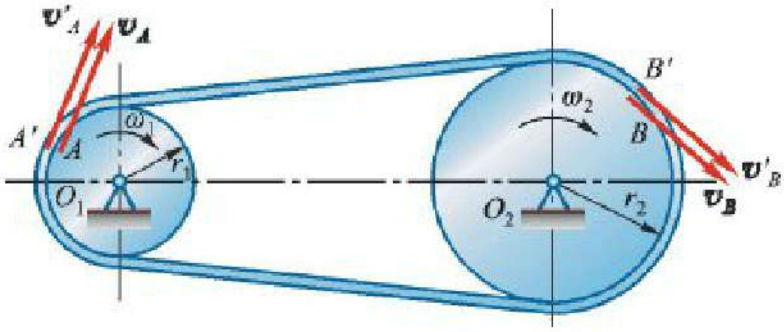
得：$$R_1\omega_1 = R_2\omega_2$$

② 传动比



$$i_{12} = \pm\frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm\frac{R_2}{R_1} = \pm\frac{z_2}{z_1}$$

2、带轮传动



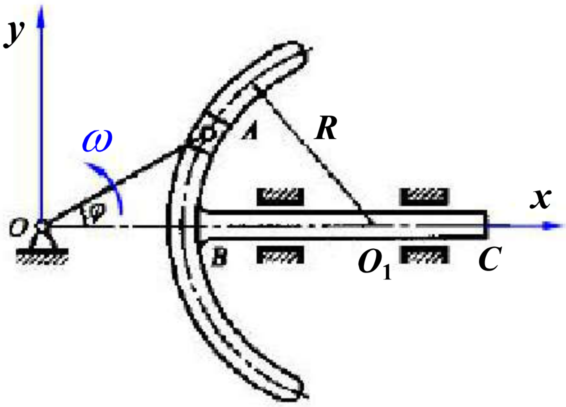
$$v_A = v'_A = v'_B = v_B$$

$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2$$

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

例7-1

图示圆弧形滑道半径R=100mm，OA=100mm， ω=4rad/s，求: (1)导杆BC的运动规律，(2)当 $\phi=30^0$时，导杆BC的速度和加速度。



解：（1）运动方程

$$x = 2OA\cos\varphi = 2R\cos\omega t = 0.2\cos 4t$$

$$y = 0$$

(2) 速度和加速度 $\phi=30^0$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -2R\omega\sin\omega t = -0.8\sin 4t$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2\,x}{\mathrm{d}\,t^2} = -2R\omega^2\cos\omega t = -3.2\cos 4t$$

$$v = -0.8\sin 30^\circ = -0.4\,\mathrm{m/s} \qquad a = -3.2\cos 30^\circ = -2.771\,\mathrm{m/s}$$

7-5 以矢量表示角速度和角加速度

1、角速度矢量和角加速度矢量

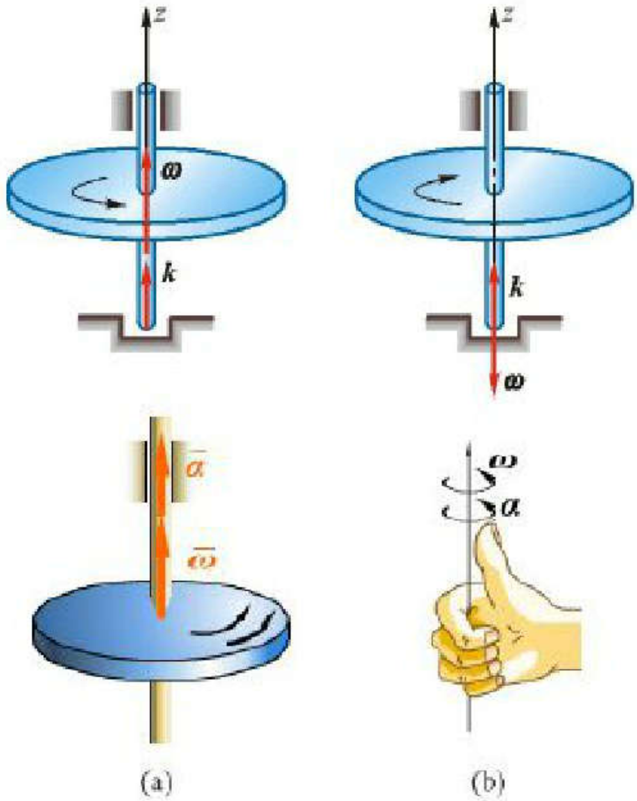
角速度矢量

$$\vec{\omega}\begin{cases}\text{大小} & |\vec{\omega}| = |\omega| = \left|\dfrac{d\varphi}{dt}\right| \\ \text{作用线} & \text{沿轴线　滑动矢量} \\ \text{指向} & \text{右手螺旋定则}\end{cases}$$

$$\boxed{\vec{\omega} = \omega\vec{k}}$$

角加速度矢量

$$\boxed{\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\vec{k} = \alpha\vec{k}}$$



7-5 以矢量表示角速度和角加速度

2、绕定轴转动刚体上点的速度和加速度

速度 $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}\begin{cases}\text{大小} & |\vec{\omega}|\cdot|\vec{r}|\sin\theta=|\vec{\omega}|R=|\vec{v}| \\ \text{方向} & \text{右手定则}\end{cases}$

加速度 $\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\omega}\times\vec{r})$

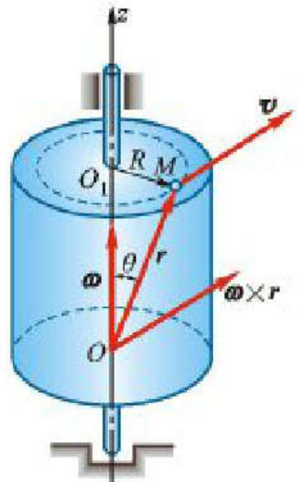
$$=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

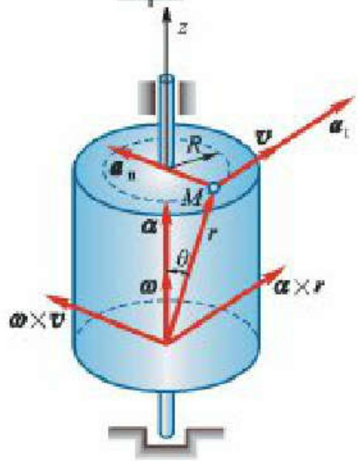
$$=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}$$

$$=\vec{a}_{\mathrm{t}}+\vec{a}_{\mathrm{n}}$$

$\vec{a}_{\mathrm{t}}=\vec{\alpha}\times\vec{r}$ M点切向加速度

$\vec{a}_{\mathrm{n}}=\vec{\omega}\times\vec{v}=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ M点法向加速度





例7-1

刚体绕定轴转动，已知转轴通过坐标原点O,角速度矢为

$$\vec{\omega}=5\sin\frac{\pi t}{2}\vec{i}+5\cos\frac{\pi t}{2}\vec{j}+5\sqrt{3}\vec{k}$$

求：t =1s时,刚体上点M（0，2，3）的速度矢及加速度矢。

解：$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5\sin\frac{\pi t}{2} & 5\cos\frac{\pi t}{2} & 5\sqrt{3}\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}=-10\sqrt{3}\vec{i}-15\vec{j}+10\vec{k}$

$$\vec{a}=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\overline{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}$$

$$=\left(-\frac{15}{2}\pi+75\sqrt{3}\right)\vec{i}-200\vec{j}-75\vec{k}$$

例7-2

某定轴转动刚体通过点M_0（2，1，3），其角速度矢 $\vec{\omega}$的方向余弦为0.6，0.48，0.64，角速度 的大小 ω=25rad/s 。

求：刚体上点M（10，7，11）的速度矢。

解：角速度矢量

$$\vec{\omega} = \omega \vec{n} \qquad \text{其中} \quad \vec{n} = (0.6, 0.48, 0.64)$$

M点相对于转轴上一点M_0的矢径

$$\vec{r} = \vec{r}_M - \vec{r}_{M_0} = (10,7,11) - (2,1,3) = (8,6,8)$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega(\vec{n} \times \vec{r}) = \omega \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.6 & 0.48 & 0.64 \\ 8 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 8\vec{j} - 6\vec{k}$$