

# 第十五章 碰撞

§ 15-1 碰撞问题的基本假设

§ 15-2 碰撞过程的基本定理

§ 15-3 两球的碰撞·恢复系数

§ 15-4 碰撞问题举例

§ 15-5 碰撞冲量对绕定轴转动刚体的作用  
·撞击中心

碰撞的特点是在极短的时间间隔内，物体的运动有急剧的变化，同时产生极大的碰撞力。

## § 15-1 碰撞问题的基本假设

(1) 采用**准刚体模型**，即物体仍看成刚体，但在碰撞处的极小范围内可以变形。碰撞过程分为两个阶段：**变形阶段**与**恢复阶段**。

(2) 碰撞力很大，作用时间很短，是瞬时力。在碰撞过程中，重力等常规力可以忽略不计。

(3) 碰撞过程非常短促，因此物体的位移可以忽略不计；即碰撞前后物体的位置不变。

此外，将只研究碰撞前后物体运动的变化（速度、能量等），而不研究碰撞过程中力的变化细节。因此，将使用各种普遍定理的积分形式（有限形式），对碰撞力也只考虑它在碰撞时间内的积累效应——**碰撞冲量**



## § 15-2 碰撞过程的基本定理

一、质系动量定理的积分形式（又称冲量定理）

$$\bar{\mathbf{p}}' - \bar{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{I}}_i^{(e)}$$

$$\bar{\mathbf{p}}' = \sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{v}}_i' \quad \bar{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{v}}_i$$

$$\bar{\mathbf{I}}_i = \int_{t_1}^{t_2} \bar{\mathbf{F}}_i^{(e)} dt$$

即：质系在 $t_2$ 及 $t_1$ 时刻的动量的变化，等于在同一时间间隔内作用于质系的外碰撞冲量的主矢，可写成质心运动定理形式

$$m\bar{v}'_C - m\bar{v}_C = \sum_{i=1}^n \bar{I}_i^{(e)}$$

## 二、质系动量矩定理的积分形式（冲量矩定理）

$$\bar{L}'_O - \bar{L}_O = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{I}_i^{(e)}$$

或

$$\bar{L}'_O - \bar{L}_O = \sum_{i=1}^n \bar{M}_O(\bar{I}_i^{(e)})$$

即：质系在 $t_2$ 及 $t_1$ 时刻对 $O$ 点动量矩的变化，等于在同一时间间隔内作用于质系的外碰撞冲量对同一点的主矩。

矩心可以取在固定点 $O$ ，也可以取在质系的质心 $C$ 。即：

$$\bar{L}'_C - \bar{L}_C = \sum_{i=1}^n \bar{M}_C(\bar{I}_i^{(e)})$$

对刚体作平面运动，有

$$J_C \omega' - J_C \omega = \sum_{i=1}^n M_C(\bar{I}_i^{(e)})$$



**碰撞过程中一般不便于应用动能定理。**

碰撞过程除受动力学规律支配外，还与材料的变形恢复性能密切相关，因此解决碰撞问题，除动力学方程外，还必须补充有关材料变形恢复性能的**物理条件**。



## § 15-3 两球的碰撞·恢复系数

碰撞分类：

{ 对心碰撞 { 对心正碰撞  
                  { 对心斜碰撞  
{ 偏心碰撞

## 一、小球对固定面的碰撞

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} \quad v'_1 = \sqrt{2gh_2}$$

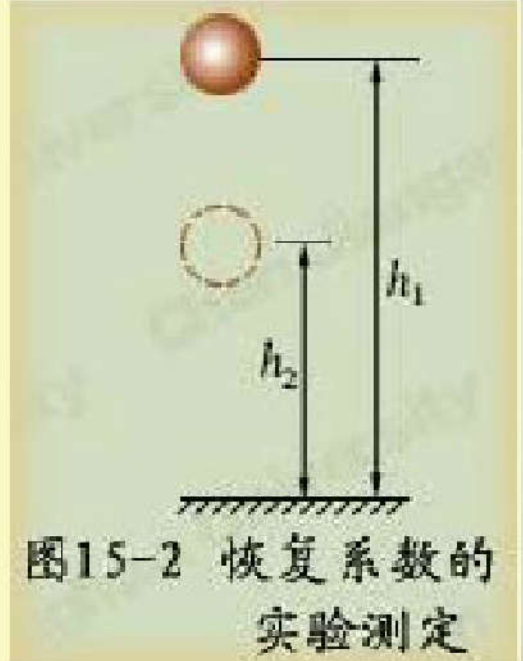
$$\frac{v'}{v} = k \quad k \text{称为恢复系数}$$

$$k = \frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \quad \text{可用实验测定}$$

$0 < k < 1$  弹性碰撞

$k = 1$  完全弹性碰撞 为理想情况

$k = 0$  塑性碰撞





## 二、一般情况下的恢复系数

$$k = \left| \frac{v_r'^n}{v_r^n} \right|$$

$v_r'^n$  ——碰撞后两物体接触点沿法线方向的相对速度

$v_r^n$  ——碰撞前两物体接触点沿法线方向的相对速度

如果小球与固定面作斜碰撞，入射角为  $\alpha$ ，反射角为  $\beta$ ，试计算其恢复系数

解：由于不计摩擦，所以

$$\vec{v}'_{\tau} = \vec{v}_{\tau}$$

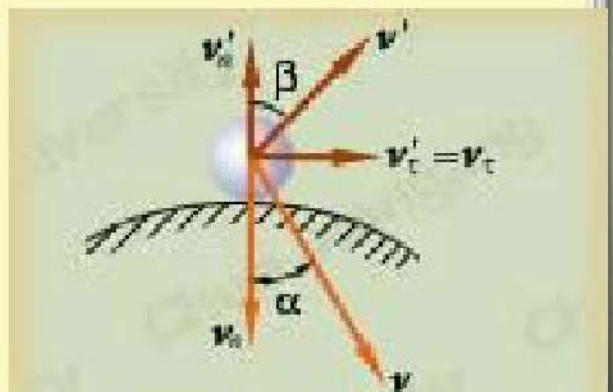


图15-6 球与固定面斜碰

即:  $v' \sin \beta = v \sin \alpha$

$$k = \frac{v'_n}{v_n} = \frac{v' \cos \beta}{v \cos \alpha}$$

$$= \frac{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} v \cos \beta}{v \cos \alpha}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$$

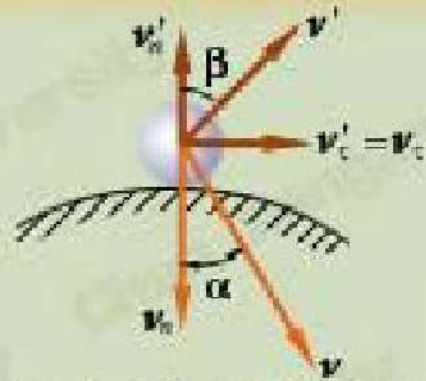


图15-6 球与固定面斜碰



## § 15-4 碰撞问题举例

例1、两个球的质量分别为 $m_1$ 和 $m_2$ ，碰撞开始时两质心的速度分别为 $v_1$ 和 $v_2$ ，且沿同一直线，如图所示。如恢复系数为 $k$ ，试求碰撞后两者的速度和碰撞过程中损失的动能。



解：以两球组成的系统为研究对象

根据动量守恒，有

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

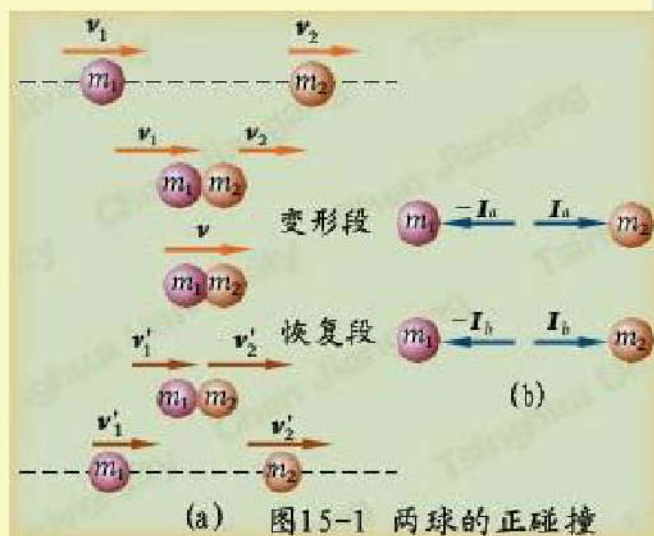
补充恢复系数公式 (1)

$$k = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} \quad (2)$$

两式联立求解，得

$$v_1' = v_1 - (1+k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$$

$$v_2' = v_2 + (1+k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$$





碰撞前后的动能分别为

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

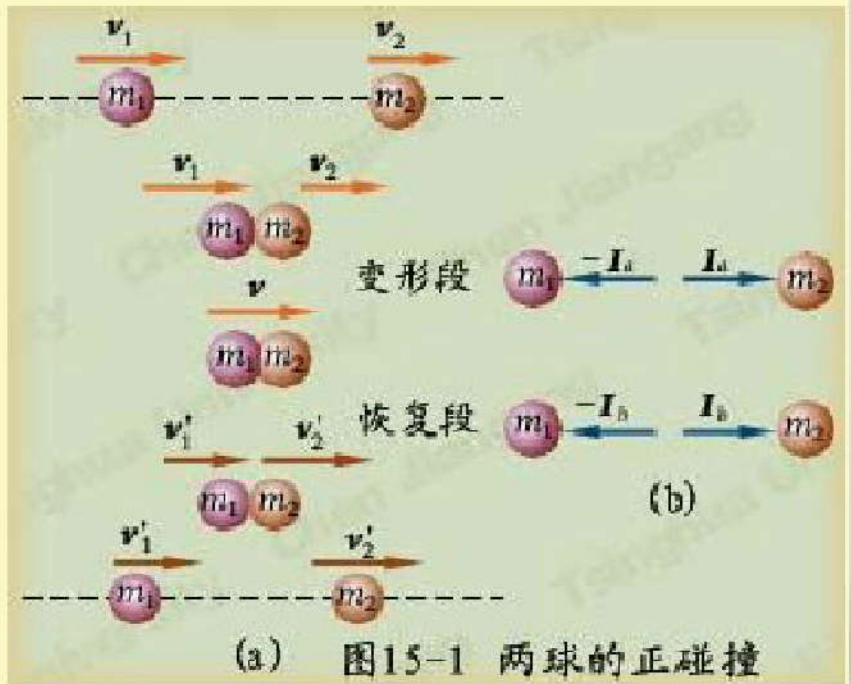
$$T_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

在碰撞过程中质点系的动能损失为

$$\Delta T = T_1 - T_2$$

经化简后，得到

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (1 - k^2) (v_1 - v_2)^2$$



$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (1 - k^2) (v_1 - v_2)^2$$

讨论：

- 1) 完全弹性碰撞时， $k=1$ ， $\Delta T=0$ 。即动能没有损失。
- 2) 塑性碰撞时， $k=0$ ，动能损失为

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2$$

如果第二个物体在碰撞开始时处于静止，即 $v_2=0$ ，则

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1 = \frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} T_1$$



$$\Delta T = \frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} T_1$$

锻压金属就属于这种情况。最理想的情况是系统的碰撞动能损失尽可能地大，这样，转变为锻件的变形能就很大。为此，应选  $m_2 \gg m_1$ ，即小锤大砧。

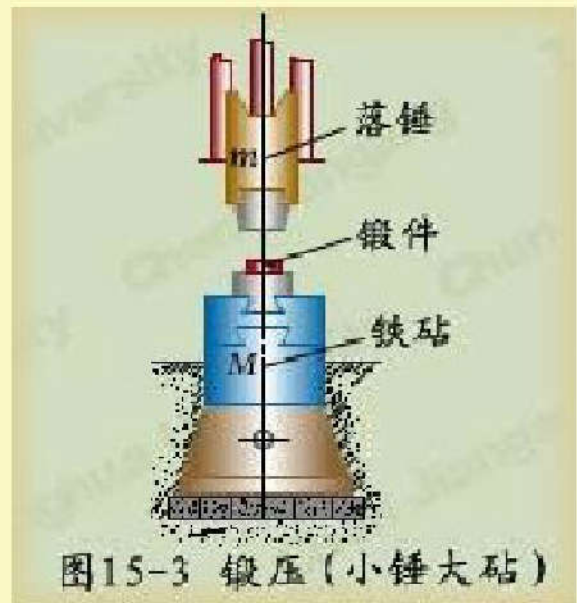


图15-3 锻压(小锤大砧)

$$\Delta T = \frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} T_1$$

打桩也属于这种情况。不过我们希望碰撞结束后，桩应获得最大的动能，以使桩克服土壤的阻力前进，即碰撞过程中系统的动能损失应尽可能地小。为此，应选 $m_2 \ll m_1$ ，即大锤小桩。

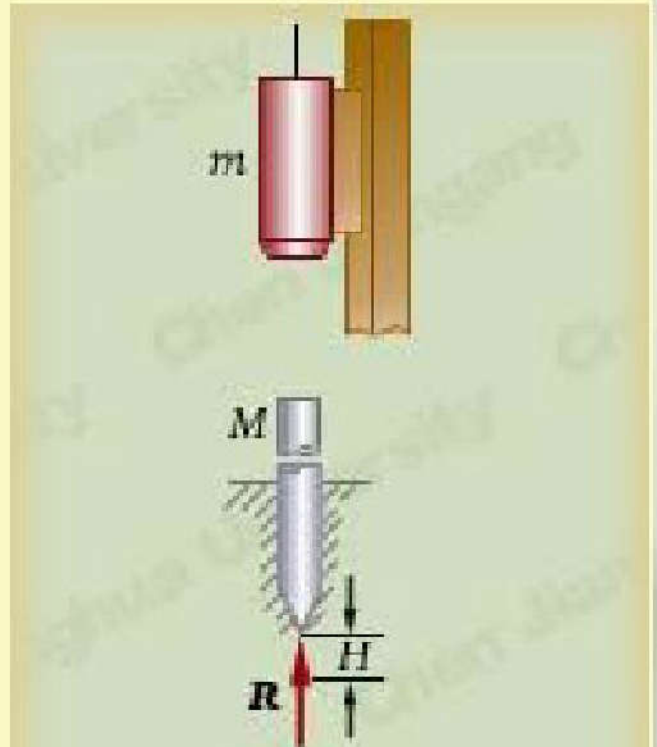


图15-4 打桩（大锤小桩）

例2、图示中一绳悬挂球A。将球拉起使绳与铅垂线夹角  $\theta_1=60^\circ$ ，再将球无初速释放，在铅垂位置球与物块B相碰。碰撞后，球A返回到绳与铅垂线夹角  $\theta_2=30^\circ$ 的位置，物块B向前移动了0.2m停止。已知  $l=1\text{m}$ ,  $m_A=2\text{kg}$ ,  $m_B=10\text{kg}$  求：

- (1) 球和物块间的恢复系数
- (2) 物块和水平面间的摩擦系数

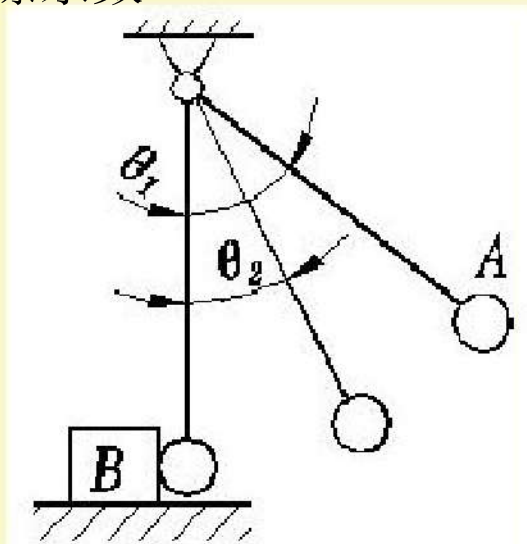
解：(1) 求恢复系数

碰撞前过程

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = m_Agl(1 - \cos\theta_1)$$

$$v_A = 3.13(\text{m/s})$$

碰撞后过程，同理



$$v'_A = 1.62(m/s)$$

碰撞过程中动量守恒

$$m_A v_A = -m_A v'_A + m_B v'_B$$

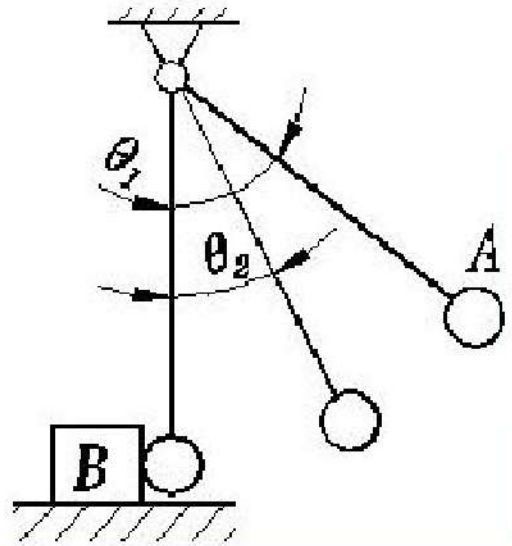
$$v'_B = \frac{m_A(v_A + v'_A)}{m_B} = 0.95(m/s)$$

所以

$$k = \frac{v'_A + v'_B}{v_A} = \frac{1.62 + 0.95}{3.13} = 0.82$$

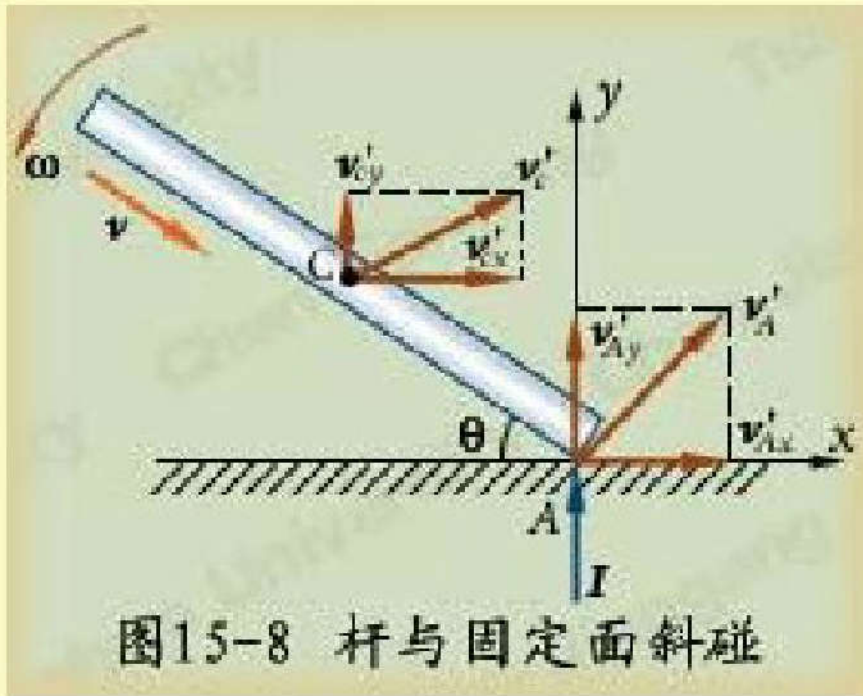
(2) 碰后用动能定理  $0 - \frac{1}{2} m_B v_B'^2 = -Fs$

$$\frac{1}{2} m_B v_B'^2 = f m_B g s \quad f = 0.23$$





**例3** 均质细杆( $m, l$ )与光滑地面成  $\theta$  角，并以速度  $v$  平行于杆自身而撞击地面；设碰撞是完全弹性的，求碰撞后杆的运动。



解：杆作平面运动，杆的动力学方程为：

$$mv'_{Cx} - mv \cos \theta = 0$$

$$mv'_{Cy} - (-mv \sin \theta) = I$$

$$\frac{1}{12} ml^2 \omega - 0 = I \cdot \frac{l}{2} \cos \theta$$

补充方程

$$k = \frac{v'_{Cy} + \frac{l}{2} \omega \cos \theta}{v \sin \theta} = 1$$

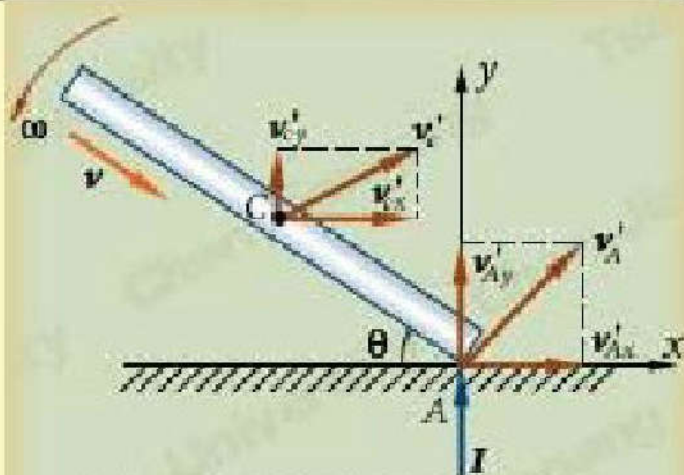


图15-8 杆与固定面斜碰



解之，得：

$$v'_{Cx} = v \cos \theta \qquad v'_{Cy} = \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta} v \sin \theta$$

$$\omega = \frac{12v \sin \theta \cos \theta}{(1 + 3 \cos^2 \theta)l}$$

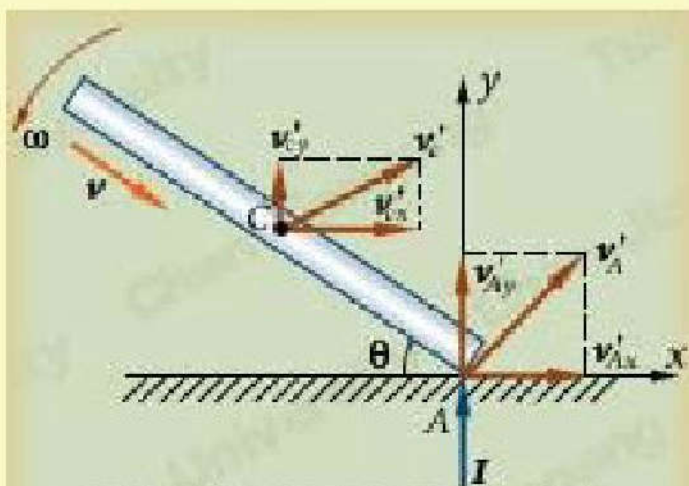


图15-8 杆与固定面斜碰

## § 15-5 碰撞冲量对绕定轴转动刚体的作用·撞击中心

**例15-3** 刚体绕 $O$ 轴作定轴转动，刚体质量为 $m$ ，对 $O$ 轴的

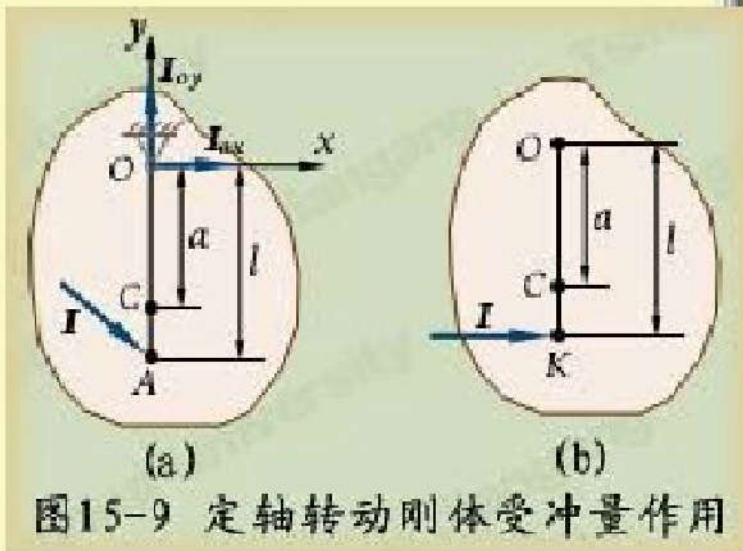
转动惯量为 $J_O$ ，角速度为 $\omega$ 。

在某瞬时受已知冲量 $I$ 作用，

求碰撞后的角速度 $\omega$ 及碰撞

过程中轴承 $O$ 的反碰撞冲量

$I_O$ ，各部尺寸如图15-9 (a)。



解：应用定轴转动动力学方程有

$$J_O \omega' - J_O \omega = I_x l$$

$$\therefore \omega' = \omega + \frac{I_x l}{J_O}$$

应用质心运动定理

$$ma\omega' - ma\omega = I_x + I_{Ox}$$

$$0 = I_y + I_{Oy}$$

$$\therefore I_{Ox} = ma(\omega' - \omega) - I_x = \left(\frac{mal}{J_O} - 1\right)I_x$$

$$I_{Oy} = -I_y$$

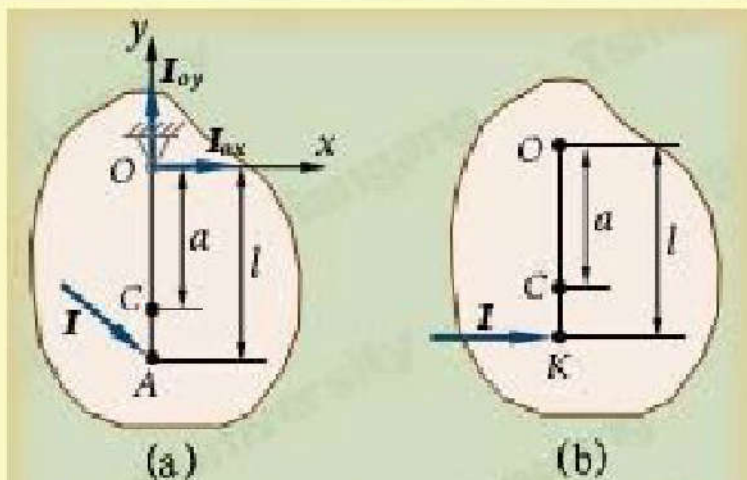


图15-9 定轴转动刚体受冲量作用

当作用冲量垂直于轴 $O$ 与质心 $C$ 连线 $OC$ 时,  $I_y=0$ , 如其作用点 $K$ 的位置还满足

$$l = \frac{J_o}{ma}$$

则 $I_{ox}=I_{oy}=0$ , 即外碰撞冲量并不引起支座的反碰撞冲量。

$K$ 点即称为**撞击中心**

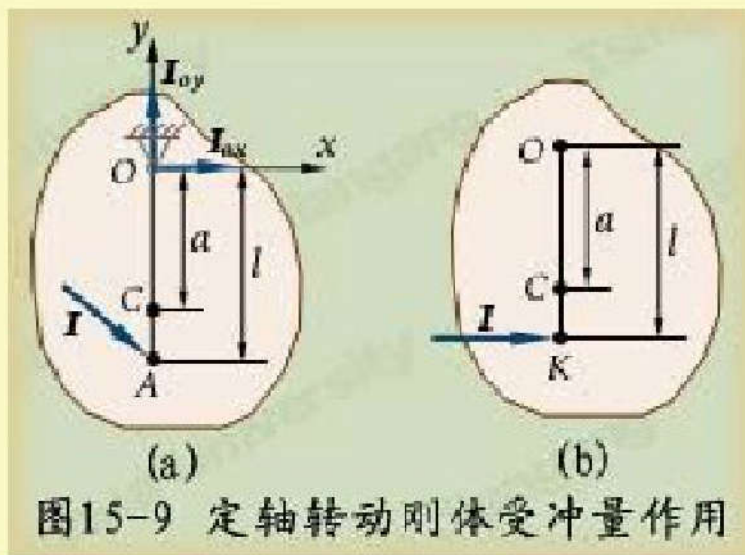




图15-10所示为一长 $2a$ 的均质杆，由水平位置绕转轴 $O$ 下落并撞在固定支座上弹回。为使轴承 $O$ 处不发生碰撞冲量，支座应装在杆的撞击中心的位置上，即

$$l = \frac{J_O}{ma} = \frac{\frac{4}{3}ma^2}{ma} = \frac{4}{3}a$$

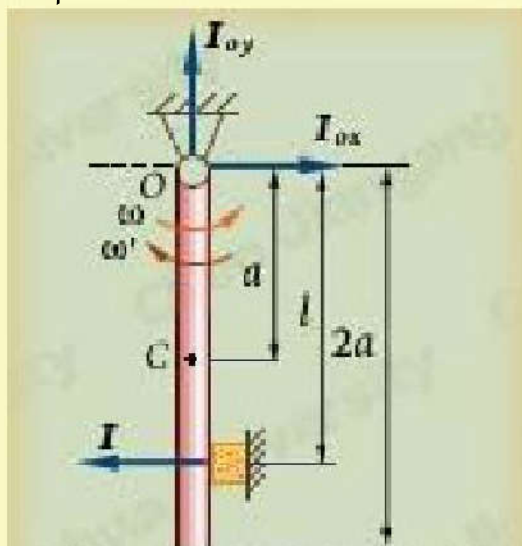


图15-10 转动杆的碰撞