线性代数

第四章 线性空间

张祥朝

复旦大学光科学与工程系

2013-4-25

第二节 维数、基、坐标

一、线性空间的基与维数

已知：在 R^n 中，线性无关的向量组最多由 n 个向量组成，而任意 $n+1$ 个向量都是线性相关的.

问题：线性空间的一个重要特征——在线性空间 V中，最多能有多少线性无关的向量?

定义 1　在线性空间 V中，如果存在 n个元素

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$$

满足:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关

(2) V中任意元素α总可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示

那么, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 称为空间 V的一个基(basis),而n 称为空间 V的维数(dimension)。

维数为n的线性空间称为n维线性空间，记作V_n.

当一个线性空间V中存在任意多个线性无关的向量时，就称 V 是无限维的.

若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为V_n的一个基，则V_n可表示为：

$$V_n = \left\{ \boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n \,\middle|\, x_1, x_2, \cdots, x_n \in R \right\}$$

二、元素在给定基下的坐标

定义 2

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间Vn的一个基，对于任意元素总有 且仅有一组有序数组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ，使

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

有序组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为元素α在 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 这个基下的坐标.

例　在线性空间P[x]$_4$中 ，$p_1=1, p_2=x, p_3=x^2, p_4=x^3, p_5=x^4$ 是它的一个基。任意不超过4次的多项式

$$p=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

可表示为：

$$p=a_0p_1+a_1p_2+a_2p_3+a_3p_4+a_4p_5$$

于是，p在这个基下的坐标为

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)^T$$

若取另一个基 $q_1=1, q_2=1+x, q_3=2x^2, q_4=x^3, q_5=x^4$，则

$$p=(a_0-a_1)q_1+a_1q_2+\frac{1}{2}a_2q_3+a_3q_4+a_4q_5$$

因此p在这个基下的坐标为

$$\left(a_0-a_1,\ a_1,\ \frac{1}{2}a_2,\ a_3,\ a_4\right)^T$$

注意：线性空间V 的任一元素在不同的基下所对的坐标一般不同，一个元素在一个基下对应的坐标是唯一的.

例 2　所有二阶实矩阵组成的集合V，对于矩阵的加法和数量乘法，构成实数域 R上的一个线性空间．对于V 中的矩阵

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

$$E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

有

$$k_1E_{11}+k_2E_{12}+k_3E_{21}+k_4E_{22}=\begin{pmatrix}k_1&k_2\\k_3&k_4\end{pmatrix},$$

$$k_1 E_{11} + k_2 E_{12} + k_3 E_{21} + k_4 E_{22} = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{k_1 = k_2 = k_3 = k_3 = 0,}$$

即$\boldsymbol{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}}$线性无关.

因此$\boldsymbol{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}}$为$\boldsymbol{V}$的一组基.

- 前面两个例子中， $1, x, x^2, x^3, x^4$

和

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

分别是$P[x]_4$和V_{2X2}的标准基（standard basis）。

在标准基下，使用自然，坐标易得。

但实际应用中，标准基不一定最适用，比如多项式在任意点a处的Taylor展开式:

例 在线性空间$R[x]_n$中,取一组基

$$\varepsilon_1=1,\varepsilon_2=(x-a),\varepsilon_3=(x-a)^2,\cdots,\varepsilon_n=(x-a)^{n-1}$$

则由 *Taylor* 公式知

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

因此 $f(x)$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标是

$$\left(f(a),f'(a),\frac{f''(a)}{2!},\cdots,\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\right)^{\mathrm{T}}.$$

- 问题：1，不同性质的线性空间

  2，同一线性空间的不同基下的坐标表示

- 若线性空间V有一个基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$

设 $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$

$\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n$

即向量 $\alpha, \beta \in V$在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标分别为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$

和 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$，则

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1)\alpha_1 + (a_2 + b_2)\alpha_2 + \cdots + (a_n + b_n)\alpha_n$$

$$k\alpha = k a_1\alpha_1 + k a_2\alpha_2 + \cdots + k a_n\alpha_n$$

于是$\alpha + \beta$与$k\alpha$的坐标分别为

$$(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)^T = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T + (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$$

$$(k a_1, k a_2, \cdots, k a_n)^T = k(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$$

上式表明：在向量用坐标表示后，它们的运算就归结为坐标的运算，因而线性空间 V_n 的讨论就归结为 R^n 的讨论. 下面更确切地说明这一点.

定义　设 U,V是两个线性空间，如果它们的元素之间有一一对应关系，且这个对应关系保持线性组合的对应，那末就称线性空间U与V**同构(isomorphic).**

例如 n 维线性空间

$$V_n = \{\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in R\}$$

与n维数组向量空间 R^n同构.

因为 (1) V_n中的元素 α与R^n中的元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$

形成一一对应关系；

$$V_n \qquad \alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$

$$R^n \qquad x = (x_1 \quad , \quad x_2 \quad , \quad \cdots, \quad x_n \quad)^T$$

(2)设 $\alpha \leftrightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$

$\beta \leftrightarrow (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$

则有 $\alpha + \beta \leftrightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T + (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$

$$\lambda\alpha \leftrightarrow \lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

结论

1．数域$\boldsymbol{P}$上任意两个 $\boldsymbol{n}$维线性空间都同构.

2．同构的线性空间之间具有反身性、对称性与传递性.

3．同维数的线性空间必同构.

同构的意义

在线性空间的抽象讨论中，无论构成线性空间的元素是什么，其中的运算是如何定义的，我们所关心的只是这些运算的代数性质．从这个意义上可以说，同构的线性空间是可以不加区别的，而有限维线性空间唯一本质的特征就是它的维数．

所以任意线性空间中元素的线性运算就可以转化为其在以特定基下的坐标向量的运算. 也就是说，将任意V_n中的线性运算问题转化为R^n中的运算问题。

二、基变换公式与过渡矩阵

问题：在n维线性空间V中，任意n个线性无关的向量都可以作为V的一组基．对于不同的基，同一个向量的坐标是不同的．

那么，同一个向量在不同的基下的坐标有什么关系呢？换句话说，随着基的改变，向量的坐标如何改变呢？

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$及$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是线性空间$V_n$的两个基,且有

$$\begin{cases} \beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{n2}\alpha_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_n = p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n \end{cases},$$

称此公式为基变换公式.

$$
\begin{cases}
\beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{n1}\alpha_n \\
\beta_2 = p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{n2}\alpha_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_n = p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n
\end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow P^T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.
$$

$$\Rightarrow (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$$

基变换公式

在基变换公式

$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$ 中，

矩阵P称为由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵（transition matrix）．

过渡矩阵P是可逆的．

坐标变换公式

定理1 设V_n中的元素α,在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标为$\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T$,

在基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的坐标为$\left(x_1',x_2',\cdots,x_n'\right)^T$,

若两个基满足关系式

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$$

则有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

证明

$$\because \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)P$$

$$\therefore (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)P\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

即
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

由于矩阵P可逆,所以
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

例1 在 $P[x]_3$ 中取两个基

$$\alpha_1 = x^3 + 2x^2 - x, \qquad \alpha_2 = x^3 - x^2 + x + 1,$$

$$\alpha_3 = -x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad \alpha_4 = -x^3 - x^2 + 1,$$

及 $$\beta_1 = 2x^3 + x^2 + 1, \qquad \beta_2 = x^2 + 2x + 2,$$

$$\beta_3 = -2x^3 + x^2 + x + 2, \quad \beta_4 = x^3 + 3x^2 + x + 2,$$

求坐标变换公式.

解 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 表示.

因为 $$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (x^3, x^2, x, 1)A,$$

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (x^3, x^2, x, 1)B,$$

其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$

得 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A^{-1}B.$

故坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}=B^{-1}A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

用初等变换计算 $B^{-1}A$.

$$(B \mid A) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{初等行变换}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1\end{array}\right) = \left(E \mid B^{-1}A\right)$$

例2　坐标变换的几何意义.

设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

及 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

为线性空间$V = R^2$的两个基.

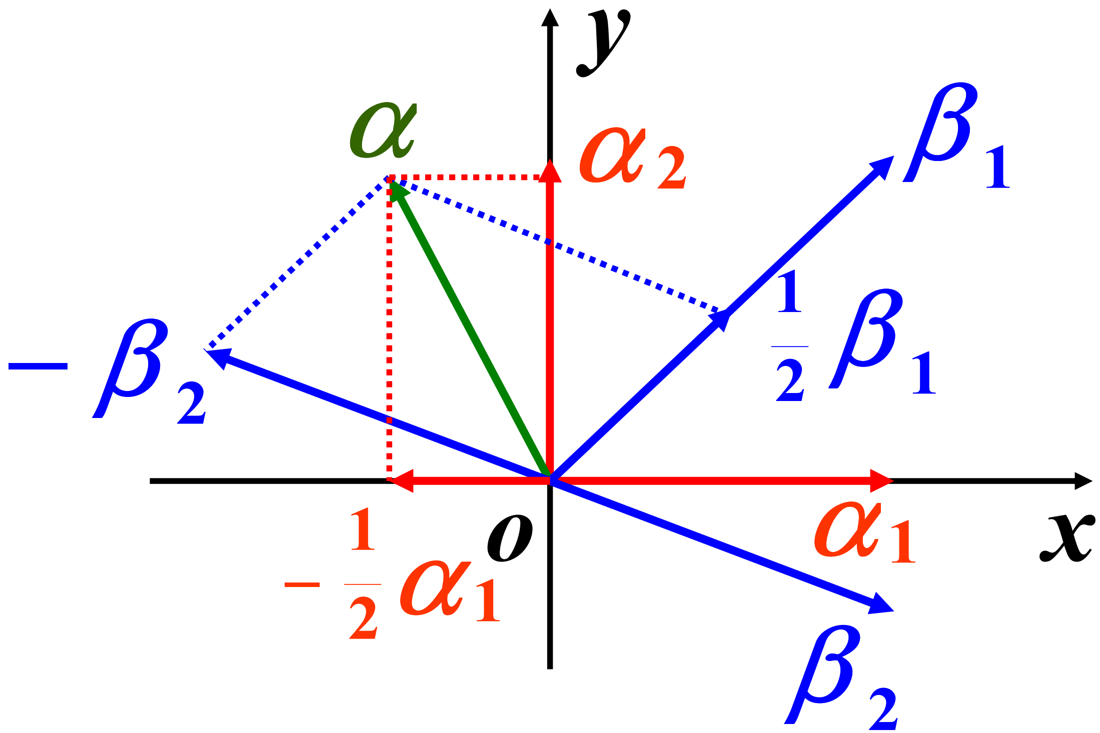
又设$\alpha = -\frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2$， 则$\alpha$在基$\alpha_1, \alpha_2$下的坐标为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

由坐标变换公式可知, α在基β_1,β_2下的坐标为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

即 $\alpha = \frac{1}{2}\beta_1 - \beta_2.$



三、小结

1．基变换公式

$$\begin{cases} \beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{n2}\alpha_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_n = p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) P$$

2．坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

思考题

证明 $x^3, x^3+x, x^2+1, x+1$ 是 $P[x]_3$ 的一个基，并求多项式 x^2+2x+3 在这个基下的坐标．

思考题解答

令

$$k_1x^3+k_2(x^3+x)+k_3(x^2+1)+k_4(x+1)$$
$$=(k_1+k_2)x^3+k_3x^2+(k_2+k_4)x+(k_3+k_4)$$
$$=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k_1+k_2=0,\\ k_3=0,\\ k_2+k_4=0,\\ k_3+k_4=0\end{cases}\Rightarrow k_1=k_2=k_3=k_4=0$$

故$x^3,x^3+x,x^2+1,x+1$线性无关,是$P[x]_3$的一个基.

又令

$$a_1x^3+a_2(x^3+x)+a_3(x^2+1)+a_4(x+1)$$
$$=x^2+2x+3,$$

则 $\begin{cases} a_1+a_2=0, \\ a_3=1, \\ a_2+a_4=2, \\ a_3+a_4=3 \end{cases}$ 解之可得 $\begin{cases} a_1=0, \\ a_2=0, \\ a_3=1, \\ a_4=2. \end{cases}$

故 x^2+2x+3 在这个基下的坐标为 $(0,0,1,2)^T$.