第三节 泰勒公式

目的—用多项式近似表示函数. 应用 $\begin{cases} \text{理论分析} \\ \text{近似计算} \end{cases}$

一、泰勒公式的建立

二、几个初等函数的麦克劳林公式

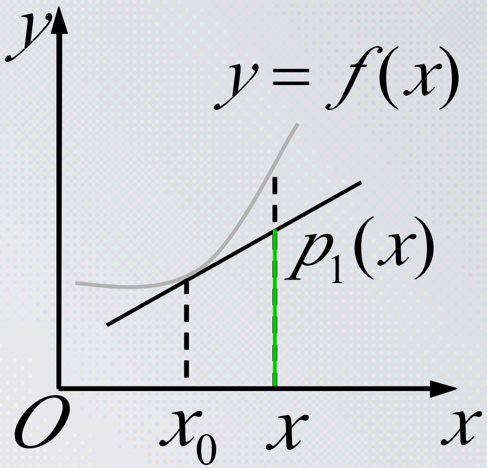
三、泰勒公式的应用

一、泰勒公式的建立

在微分应用中已知近似公式：

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{p_1(x)}$$

x 的一次多项式



以直代曲

特点：$p_1(x_0) = f(x_0)$

$$p_1'(x_0) = f'(x_0)$$

需要解决的问题 $\begin{cases} \text{如何提高精度？} \\ \text{如何估计误差？} \end{cases}$

1. 求 n 次近似多项式 $p_n(x)$, 要求:

$$p_n(x_0)=f(x_0),\ p_n'(x_0)=f'(x_0),\ \cdots,\ p_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$$

令 $\quad p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$

则 $\quad p_n'(x)= \qquad a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+n\,a_n(x-x_0)^{n-1}$

$\quad p_n''(x)= \qquad 2\,!a_2+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$

$\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\quad p_n^{(n)}(x)= \qquad n!a_n$

$$a_0=p_n(x_0)=f(x_0),\qquad a_1=p_n'(x_0)=f'(x_0),$$

$$a_2=\frac{1}{2!}p_n''(x_0)=\frac{1}{2!}f''(x_0),\ \cdots,\ a_n=\frac{1}{n!}p_n^{(n)}(x_0)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

故 $\quad p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

2. 余项估计

令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$(称为余项)，则有

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

$$= \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - 0} = \frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n} \quad (\xi_1 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$= \frac{R_n'(\xi_1) - R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n - 0} = \frac{R_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2 - x_0)^{n-1}} \quad (\xi_2 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } \xi_1 \text{ 之间})$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{R_n^{(n)}(\xi_n) - R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)\cdots 2(\xi_n - x_0) - 0} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$\because\ p_n^{(n+1)}(x) = 0,\ \therefore\ R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

当在 x_0 的某邻域内 $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M$ 时

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}$$

$$\therefore\ R_n(x) = o((x-x_0)^n) \quad (x \to x_0)$$

泰勒(Taylor)中值定理：

若 $f(x)$ 在包含 x_0 的某开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶的导数，则当 $x\in(a,b)$ 时，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \quad ①$$

其中 $$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\xi\text{ 在 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间}) \quad ②$$

公式 ① 称为 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式 .

公式 ② 称为 n 阶泰勒公式的拉格朗日余项 .

注意到 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$ ③

在不需要余项的精确表达式时，泰勒公式可写为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n] \quad ④$$

公式 ③ 称为n阶泰勒公式的佩亚诺(Peano) 余项 .

* 可以证明:

$f(x)$ 在点 x_0 有直到n阶的导数

$\Longrightarrow$ ④ 式成立

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(ξ 在 x_0 与 x 之间)

特例:

(1) 当 $n=0$ 时, 泰勒公式给出拉格朗日中值定理

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0) \quad (\xi \text{在} x_0 \text{与} x \text{之间})$$

(2) 当 $n=1$ 时, 泰勒公式变为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$

(ξ 在 x_0 与 x 之间)

可见 $f(x)\approx f(x_0)+\underline{f'(x_0)(x-x_0)}$ $\boxed{\mathrm{d}f}$

误差 $R_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$ (ξ 在 x_0 与 x 之间)

在泰勒公式中若取 $x_0=0$, 记 $\xi=\theta x\ (0<\theta<1)$, 则有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

称为麦克劳林(Maclaurin)公式 .

由此得近似公式

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

若在公式成立的区间上 $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M$, 则有误差估计式

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{M}{(n+1)!}\left|x\right|^{n+1}$$

二、几个初等函数的麦克劳林公式

(1) $f(x)=\mathrm{e}^{x}$

$$\because \quad f^{(k)}(x)=\mathrm{e}^{x}, \quad f^{(k)}(0)=1 \quad (k=1,2,\cdots)$$

$$\therefore \quad \mathrm{e}^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+R_{n}(x)$$

其中 $R_{n}(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1)$

麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$(0<\theta<1)$$

(2) $f(x)=\sin x$

$$\because \quad f^{(k)}(x)=\sin(x+k\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$f^{(k)}(0)=\sin k\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0, & k=2m\\ (-1)^{m-1}, & k=2m-1\end{cases}\quad (m=1,2,\cdots)$$

$$\therefore \quad \sin x=x-\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^5}{5\,!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)\,!}+R_{2m}(x)$$

其中 $R_{2m}(x)=\dfrac{(-1)^m\cos(\theta\,x)}{(2m+1)\,!}x^{2m+1}\quad(0<\theta<1)$

麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2\,!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta\,x)}{(n+1)\,!}x^{n+1}$$

$$(0<\theta<1)$$

(3) $f(x)=\cos x$

类似可得

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+1}(x)$$

其中

$$R_{2m+1}(x) = \frac{(-1)^{m+1}\cos(\theta x)}{(2m+2)!} x^{2m+2} \qquad (0<\theta<1)$$

麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$(0<\theta<1)$$

(4) $f(x)=(1+x)^{\alpha},\quad (x>-1)$

$\because\quad f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\qquad (k=1,2,\cdots)$$

$$\therefore\quad (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

$$(0<\theta<1)$$

麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$(0<\theta<1)$$

(5) $f(x)=\ln(1+x) \quad (x>-1)$

已知 $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k=1,2,\cdots)$

因此可得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \qquad (0<\theta<1)$

麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$(0<\theta<1)$$

三、泰勒公式的应用

1. 在近似计算中的应用

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

误差 $\left|R_n(x)\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\left|x\right|^{n+1}$

M 为 $\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ 在包含 0 , x 的某区间上的上界.

需解问题的类型:

1) 已知 x 和误差限 , 要求确定项数 n ;

2) 已知项数 n 和 x, 计算近似值并估计误差;

3) 已知项数 n 和误差限 , 确定公式中 x 的适用范围.

例**1.** 计算无理数 e 的近似值，使误差不超过 10^{-6}.

解: 已知 e^x 的麦克劳林公式为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1)$$

令 $x=1$，得

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \quad (0<\theta<1)$$

由于 $0<e^{\theta}<e<3$，欲使

$$|R_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

由计算可知当 $n=9$ 时上式成立，因此

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{9!} \approx 2.718282$$

说明: 注意舍入误差对计算结果的影响.

本例 $e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{9!}$

若每项四舍五入到小数点后 6 位, 则

各项舍入误差之和不超过 $7\times0.5\times10^{-6}$,

总误差限为 $7\times0.5\times10^{-6}+10^{-6}<5\times10^{-6}$

这时得到的近似值不能保证误差不超过 10^{-6}.

因此计算时中间结果应比精度要求多取一位 .

例2. 用近似公式 $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$ 计算 $\cos x$ 的近似值，使其精确到 0.005，试确定 x 的适用范围.

解: 近似公式的误差

$$|R_3(x)| = \left| \frac{x^4}{4!} \cos(\theta x) \right| \le \frac{|x|^4}{24}$$

令 $$\frac{|x|^4}{24} \le 0.005$$

解得 $$|x| \le 0.588$$

即当 $|x| \le 0.588$ 时，由给定的近似公式计算的结果能准确到 0.005 .

2. 利用泰勒公式求极限

例3. 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

用洛必达法则不方便！

解：用泰勒公式将分子展到 x^2 项，由于

$$\sqrt{3x+4}=2(1+\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=2\left[1+\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{4}x)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{3}{4}x)^2+o(x^2)\right]$$

$$=2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\sqrt{4-3x}=2(1-\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}=2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\therefore\ 原式=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{9}{32}$$

3. 利用泰勒公式证明不等式

例4. 证明 $\sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (x > 0).$

证: $\because \ \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)x^2$$

$$+ \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)(1 + \theta x)^{-\frac{5}{2}} x^3$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16}(1 + \theta x)^{-\frac{5}{2}} x^3 \qquad (0 < \theta < 1)$$

$+$

$$\therefore \qquad \sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (x > 0)$$

泰勒多项式逼近 $\sin x$

$$\sin x = \underline{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7} + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$