第五节 函数的极值与最大值最小值

一、函数的极值及其求法

二、最大值与最小值问题

一、函数的极值及其求法

定义: 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义, $x_0 \in (a,b)$,

若存在 x_0 的一个邻域, 在其中当 $x \neq x_0$ 时,

(1) $f(x) < f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的**极大值点**,

称 $f(x_0)$ 为函数的**极大值**;

(2) $f(x) > f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的**极小值点**,

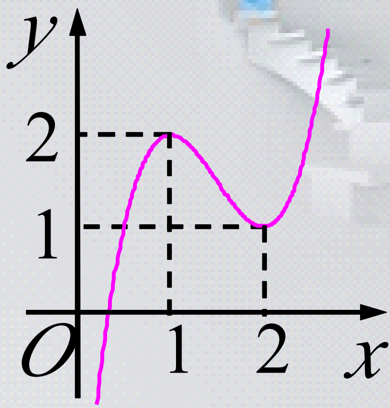
称 $f(x_0)$ 为函数的**极小值**.

极大值点与极小值点统称为**极值点**.

例如， 函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$

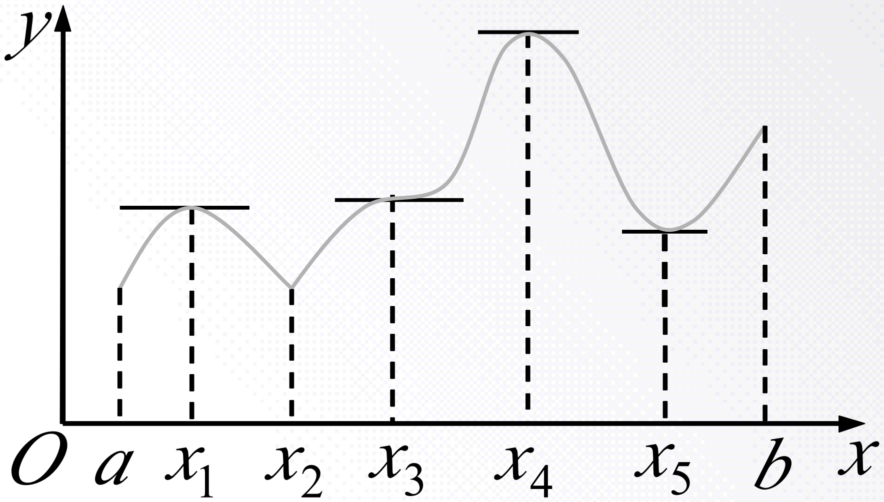
$x=1$ 为极大值点, $f(1)=2$ 是极大值

$x=2$ 为极小值点, $f(2)=1$ 是极小值



注意: 1) 函数的极值是函数的局部性质.

2) 对常见函数, 极值可能出现在导数为 0 或不存在的点.



x_1, x_4 为极大值点

x_2, x_5 为极小值点

x_3 不是极值点

定理 1 (极值第一判别法)

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内连续, 且在空心邻域内有导数, 当x由小到大通过 x_0 时,

(1) $f'(x)$ "左正右负", 则$f(x)$在 x_0 取极大值.

(2) $f'(x)$ "左负右正", 则$f(x)$在 x_0 取极小值;

(自证)

例**1.** 求函数 $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值 .

解: 1) 求导数 $f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+(x-1)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{x-\frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}$

2) 求极值可疑点

令 $f'(x)=0$, 得 $x_1=\frac{2}{5}$; 令 $f'(x)=\infty$, 得 $x_2=0$

3) 列表判别

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	∞	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-0.33	$\nearrow$

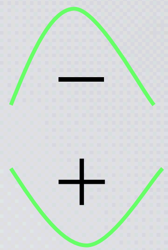
$\therefore x=0$ 是极大值点，其极大值为 $f(0)=0$

$x=\frac{2}{5}$ 是极小值点，其极小值为 $f(\frac{2}{5})=-0.33$

定理2 **(极值第二判别法)**　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$

(1) 若 $f''(x_0)<0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 取极大值；

(2) 若 $f''(x_0)>0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 取极小值 .

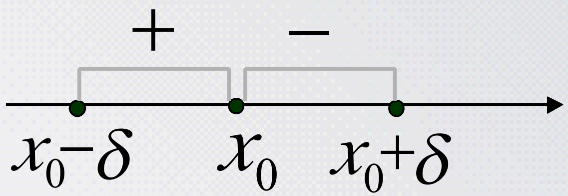


证: (1) $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}$

由 $f''(x_0)<0$ 知, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$

故当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时, $f'(x)>0$;

当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时, $f'(x)<0$,



由第一判别法知 $f(x)$ 在 x_0 取极大值.

(2) 类似可证 .

例2. 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值 .

解: 1) 求导数

$$f'(x)=6x(x^2-1)^2, \quad f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$$

2) 求驻点

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-1, x_2=0, x_3=1$

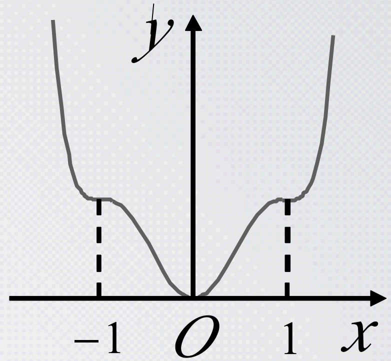
3) 判别

因 $f''(0)=6>0$，故 $f(0)=0$ 为极小值 ;

又 $f''(-1)=f''(1)=0$, 故需用第一判别法判别.

由于 $f'(x)$ 在 $x=\pm1$ 左右邻域内不变号,

$\therefore f(x)$ 在 $x=\pm1$ 没有极值.

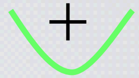


目录 上页 下页 返回 结束

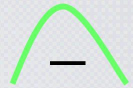
定理3 (判别法的推广) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 点有直到 n 阶导数，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0,$

则：1) 当 n 为偶数时, x_0 为极值点，且

$f^{(n)}(x_0)>0$ 时, x_0 是极小点；



$f^{(n)}(x_0)<0$ 时, x_0 是极大点 .



2) 当 n 为奇数时, x_0 不是极值点 .

证: 利用 $f(x)$ 在 x_0 点的泰勒公式，可得

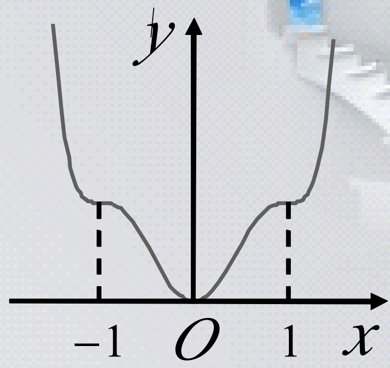
$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

当 x 充分接近 x_0 时, 上式左端正负号由右端第一项确定，故结论正确 .

例如，例2中 $f(x)=(x^2-1)^3+1$

$$f'''(x)=24\,x(5x^2-3),\quad f'''(\pm1)\neq 0$$

所以 $x=\pm1$不是极值点 .

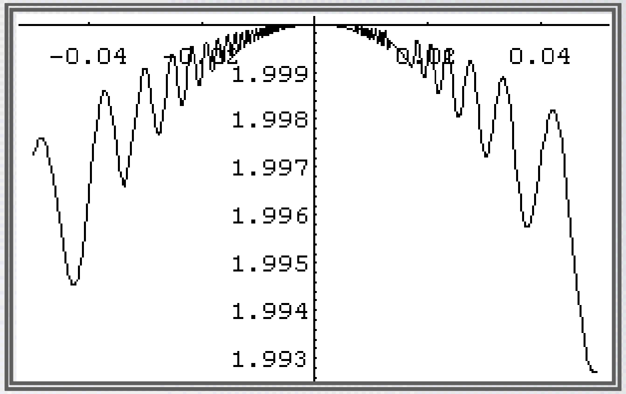


说明：极值的判别法(定理1 ~ 定理3) 都是充分的.

当这些充分条件不满足时, 不等于极值不存在 .

例如：

$$f(x)=\begin{cases} 2-x^2(2+\sin\frac{1}{x}), & x\neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$$



$f(0)=2$为极大值，但不满足定理1 ~ 定理3 的条件.

二、最大值与最小值问题

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则其最值只能在极值点或端点处达到 .

求函数最值的方法:

(1) 求 $f(x)$ 在 (a,b) 内的极值可疑点

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ \cdots\ ,\ x_m$$

(2) 最大值

$$M=\max\{\,f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m),f(a),f(b)\}$$

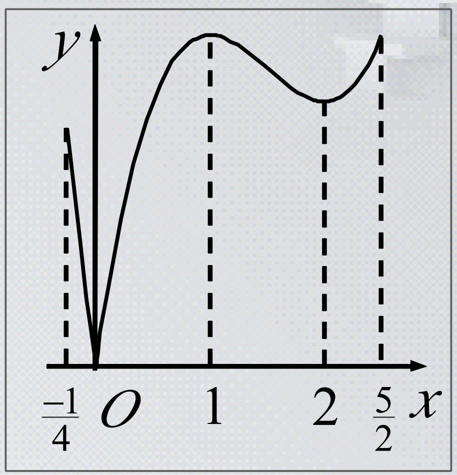
最小值

$$m=\min\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m),f(a),f(b)\}$$

特别:

- 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$内只有一个极值可疑点时，若在此点取极大 (小)值，则也是最大(小)值 .
- 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调时，最值必在端点处达到.
- 对应用问题，有时可根据实际意义判别求出的可疑点是否为最大 值点或最小值点 .

例3. 求函数 $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|$ 在闭区间$[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$上的最大值和最小值 .



解: 显然 $f(x)\in C[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$, 且

$$f(x)=\begin{cases}-(2x^3-9x^2+12x), & -\frac{1}{4}\le x\le 0\\ 2x^3-9x^2+12x, & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2), & -\frac{1}{4}\le x<0\\ 6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2), & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases}$$

$f(x)$在$[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$内有极值可疑点 $x_1=0, x_2=1, x_3=2$

$$f(\tfrac{-1}{4})=3\tfrac{19}{32},\ f(0)=0,\ f(1)=5,\ f(2)=4,\ f(\tfrac{5}{2})=5$$

故函数在 $x=0$ 取最小值 0 ; 在 $x=1$及$\frac{5}{2}$ 取最大值 5.

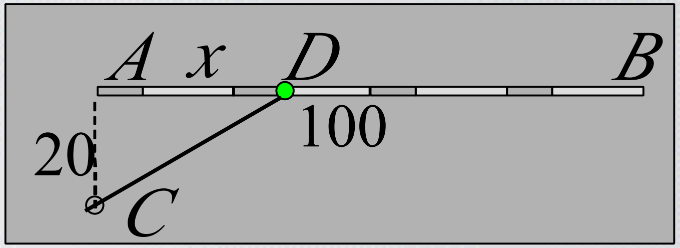
例3. 求函数 $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|$ 在闭区间 $[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$ 上的最大值和最小值 .

说明:

令 $\varphi(x)=f^2(x)$

由于 $\varphi(x)$ 与 $f(x)$ 最值点相同 , 因此也可通过 $\varphi(x)$ 求最值点.

例**4.** 铁路上 AB 段的距离为100 km，工厂 C 距 A 处 20 km， $AC\perp AB$，要在 AB 线上选定一点 D 向工厂修一条公路，已知铁路与公路每公里货运价之比为3:5，为使货物从 B 运到工厂 C 的运费最省，问 D 点应如何取？



解: 设 $AD=x$ (km)，则 $CD=\sqrt{20^2+x^2}$，总运费

$$y=5k\sqrt{20^2+x^2}+3k(100-x)\qquad(0\le x\le 100)$$

(k 为某常数)

$$y'=k\left(\frac{5x}{\sqrt{400+x^2}}-3\right),\qquad y''=5k\frac{400}{(400+x^2)^{3/2}}$$

令 $y'=0$，得 $x=15$，又 $y''\big|_{x=15}>0$，所以 $x=15$ 为唯一的极小值点，从而为最小值点，故 $AD=15$ km 时运费最省 .

目录 上页 下页 返回 结束

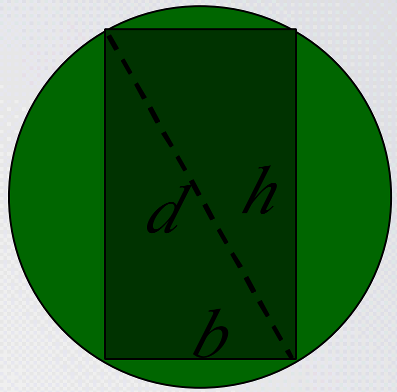
例5. 把一根直径为 d 的圆木锯成矩形梁，问矩形截面的高 h 和 b 应如何选择才能使梁的抗弯截面模量最大?

解: 由力学分析知矩形梁的抗弯截面模量为

$$w = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} b (d^2 - b^2), \qquad b \in (0, d)$$

令 $\quad w' = \frac{1}{6}(d^2 - 3b^2) = 0$

得 $\quad b = \sqrt{\frac{1}{3}}\, d$



从而有 $\quad h = \sqrt{d^2 - b^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, d$

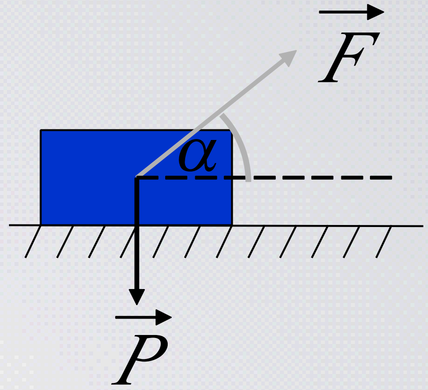
即 $\quad d : h : b = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$

由实际意义可知，所求最值存在，驻点只一个，故所求结果就是最好的选择 .

例6. 设有质量为 5 kg 的物体置于水平面上，受力 $\vec{F}$ 作

用开始移动，设摩擦系数 $\mu = 0.25$，问力 $\vec{F}$ 与水平面夹角

α 为多少时才可使力 $\vec{F}$ 的大小最小?



解: 克服摩擦的水平分力 $F_x = F\cos\alpha$

正压力 $\quad P - F_y = 5g - F\sin\alpha$

$$\therefore \quad F\cos\alpha = \mu(5g - F\sin\alpha)$$

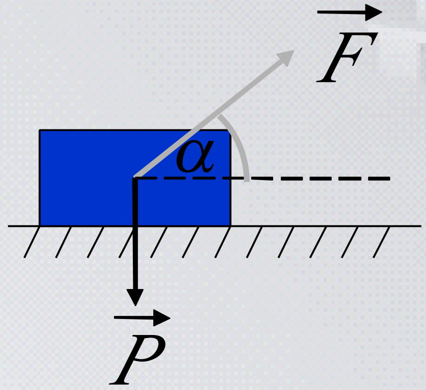
即
$$F = \frac{5\mu g}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}, \quad \alpha \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

令
$$\varphi(\alpha) = \cos\alpha + \mu\sin\alpha$$

则问题转化为求 $\varphi(\alpha)$ 的最大值问题 .

解： ……

即 $$F=\frac{5\mu g}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha},\quad \alpha\in[0,\tfrac{\pi}{2}]$$



令 $$\varphi(\alpha)=\cos\alpha+\mu\sin\alpha$$

则问题转化为求 $\varphi(\alpha)$ 的最大值问题 .

$$\varphi'(\alpha)=-\sin\alpha+\mu\cos\alpha$$

$$\varphi''(\alpha)=-\cos\alpha-\mu\sin\alpha$$

令 $\varphi'(\alpha)=0$, 解得

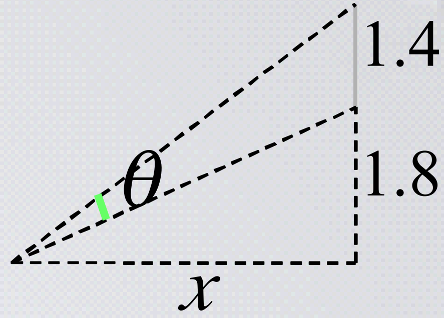
$$\alpha=\arctan\mu=\arctan 0.25=14^\circ 2'$$

而 $\varphi''(\alpha)<0$, $\therefore\ \alpha=14^\circ 2'$ 时 $\varphi(\alpha)$ 取最大值,

因而 $\boldsymbol{F}$ 取最小值 .

例7. 一张 1.4 m 高的图片挂在墙上，它的底边高于

观察者的眼睛1.8 m，问观察者在距墙多远处看图才最清楚(视角 θ 最大)？



解: 设观察者与墙的距离为 x m，则

$$\theta = \arctan\frac{1.4+1.8}{x} - \arctan\frac{1.8}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$\theta' = \frac{-3.2}{x^2+3.2^2} + \frac{1.8}{x^2+1.8^2} = \frac{-1.4(x^2-5.76)}{(x^2+3.2^2)(x^2+1.8^2)}$$

令 $\theta' = 0$，得驻点 $x = 2.4 \in (0, +\infty)$

根据问题的实际意义，观察者最佳站位存在，驻点又唯一，因此观察者站在距离墙 2.4 m 处看图最清楚 .

例**8.** 设某工厂生产某产品 x 千件的成本是 $C(x)=x^3-6x^2+15x$, 售出该产品 x 千件的收入是$R(x)=9x$, 问是否存在一个取得最大利润的生产水平? 如果存在, 找出它来.

解: 售出 x 千件产品的利润为

$$p(x)=R(x)-C(x)=-x^3+6x^2-6x$$

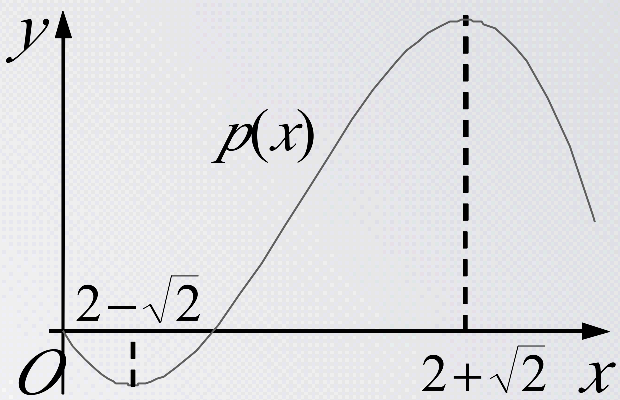
$$p'(x)=-3x^2+12x-6=-3(x^2-4x+2)$$

令$p'(x)=0$, 得 $x_1=2-\sqrt{2}\approx 0.586$

$$x_2=2+\sqrt{2}\approx 3.414$$

又 $p''(x)=-6x+12$,

$$p''(x_1)>0,\quad p''(x_2)<0$$



故在 $x_2=3.414$千件处达到最大利润,

而在 $x_1=0.586$千件处发生局部最大亏损.

目录 上页 下页 返回 结束

说明：在经济学中

$C'(x)$ 称为边际成本

$R'(x)$ 称为边际收入

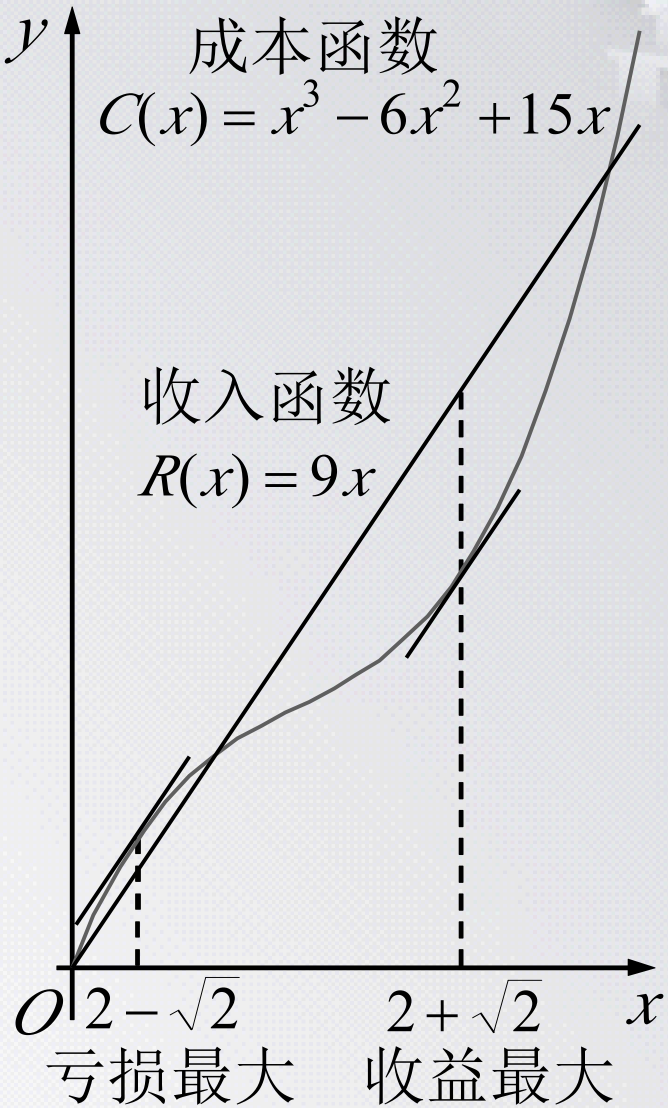
$p'(x)$ 称为边际利润

由此例分析过程可见，在给出最大利润的生产水平上 $p'(x)=0$，即

$$R'(x)=C'(x)$$

即边际收入＝边际成本

（见右图）



目录 上页 下页 返回 结束