第六节
函数图形的描绘

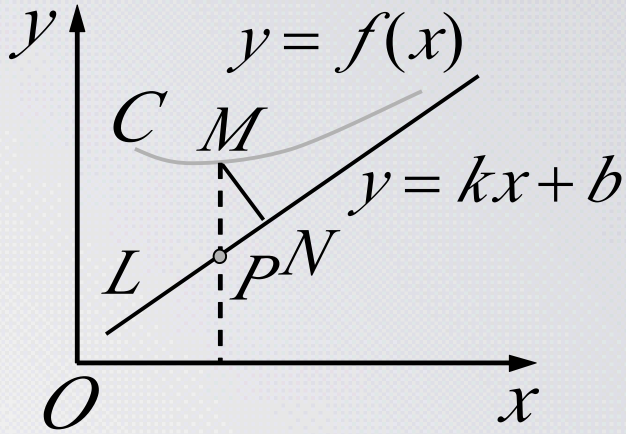
一、 曲线的渐近线

二、 函数图形的描绘

一、 曲线的渐近线

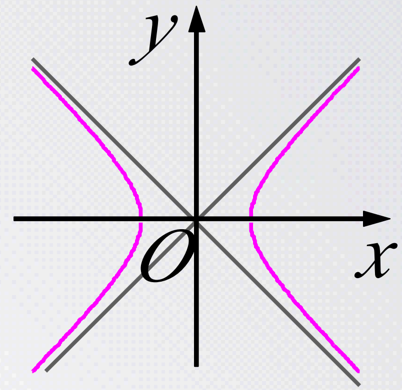
定义 . 若曲线 C 上的点 M 沿着曲线无限地远离原点时，点 M 与某一直线 L 的距离趋于 0，则称直线 L 为曲线 C 的渐近线 .

或为“纵坐标差”



例如，双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

有渐近线 $\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$

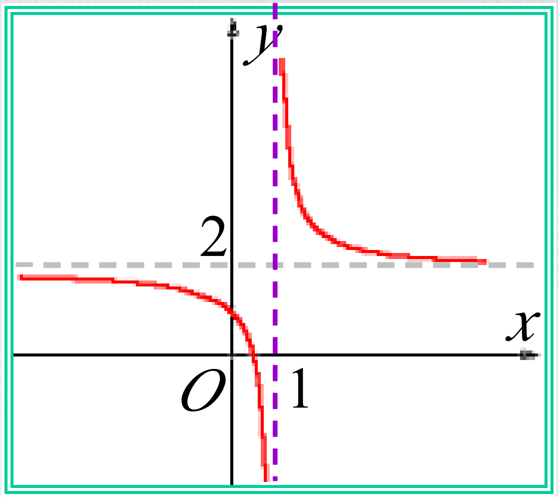


但抛物线 $y=x^2$ 无渐近线 .

1. 水平与铅直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, 则曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=b$.
(或 $x\to-\infty$)

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$, 则曲线 $y=f(x)$ 有铅直渐近线 $x=x_0$.
(或 $x\to x_0^-$)



例1. 求曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$ 的渐近线 .

解: $\because \lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1}{x-1}+2)=2$

$\therefore\ y=2$ 为水平渐近线;

$\because \lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1}{x-1}+2)=\infty$, $\therefore\ x=1$为铅直渐近线.

目录 上页 下页 返回 结束

2. 斜渐近线

若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或}x\to-\infty)}}[f(x)-(kx+b)]=0$，则曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=kx+b$.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$$

$$\Downarrow$$

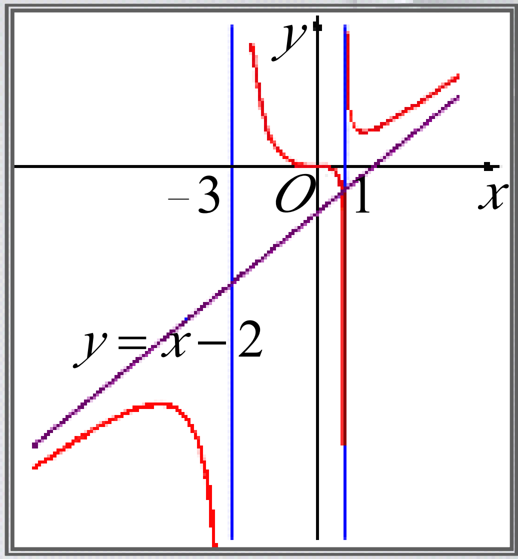
$$k=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}\right]$$

$$\therefore\quad \boxed{k=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或}x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}}$$

$$\boxed{b=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或}x\to-\infty)}}[f(x)-kx]}$$

目录 上页 下页 返回 结束

例2. 求曲线$y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$的渐近线.



解: $\because\ y=\dfrac{x^3}{(x+3)(x-1)}$, $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\(\text{或}x\to1)}} y=\infty$,

所以有铅直渐近线 $x=-3$ 及 $x=1$

又因 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+2x-3}=1$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+3x}{x^2+2x-3}=-2$$

$\therefore\quad y=x-2$为曲线的斜渐近线 .

二、函数图形的描绘

步骤：

1. 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域，并考察其对称性及周期性；

2. 求 $f'(x), f''(x)$，并求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 为 0 和不存在的点；

3. 列表判别增减及凹凸区间，求出极值和拐点；

4. 求渐近线；

5. 确定某些特殊点，描绘函数图形.

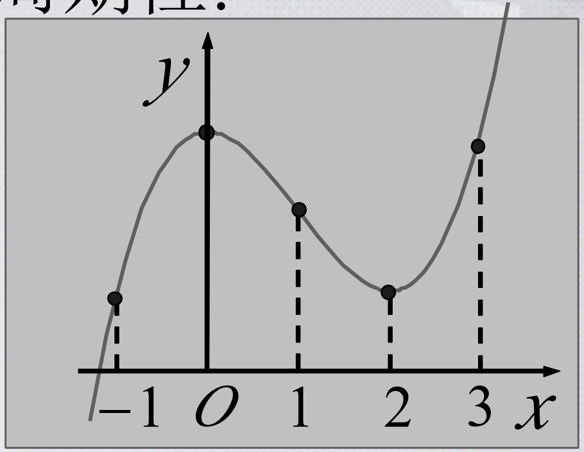
例**3.** 描绘 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$ 的图形.

解: 1) 定义域为$(-\infty,+\infty)$,无对称性及周期性.

2) $y'=x^2-2x,\ y''=2x-2,$

令 $y'=0$, 得 $x=0,\ 2$

令 $y''=0$, 得 $x=1$



3)

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$	0	$+$		$+$
y		2		$\frac{4}{3}$		$\frac{2}{3}$	
		(极大)		(拐点)		(极小)	

4)

x	-1	3
y	$\frac{2}{3}$	2

例4. 描绘方程$(x-3)^2+4y-4xy=0$的图形.

解: 1) $y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$，定义域为$(-\infty,1),(1,+\infty)$

2) 求关键点. 原方程两边对 x 求导得

$$2(x-3)+4y'-4y-4xy'=0 \qquad ①$$

$$\therefore \quad y'=\frac{x-3-2y}{2(x-1)}=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

①两边对 x 求导得 $\quad 2+4y''-8y'-4xy''=0$

$$\therefore \quad y''=\frac{1-4y'}{2(x-1)}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

令 $y'=0$ 得 $x=-1,3$;

3) 判别曲线形态

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	无定义	$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$		$+$		$+$
y		-2				0	
		(极大)				(极小)	

4) 求渐近线

$\because \lim\limits_{x\to 1} y=\infty, \therefore x=1$ 为铅直渐近线

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)},\quad y'=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2},\quad y''=\frac{2}{(x-1)^3}$$

又因 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{4}$, 即 $k=\dfrac{1}{4}$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-\frac{1}{4}x)=\lim_{x\to\infty}[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}-\frac{1}{4}x]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+9}{4(x-1)}=-\frac{5}{4}$$

$\therefore\quad y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$ 为斜渐近线

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$$

$$y'=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

$$y''=\frac{2}{(x-1)^3}$$

5) 求特殊点

x	0	2
y	$-\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$

6）绘图

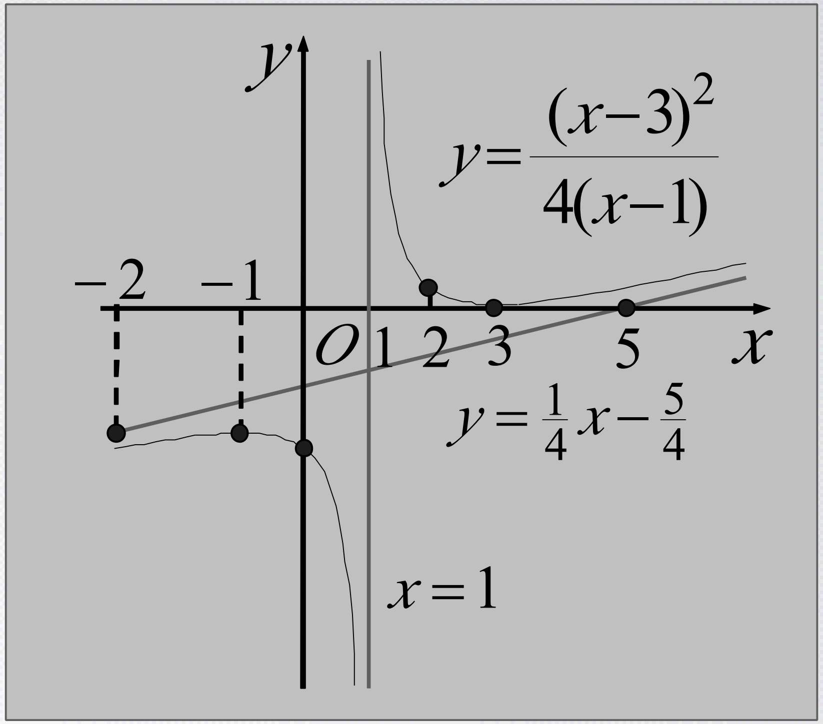
x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y	$\nearrow$	-2 (极大)	$\searrow$	无定义	$\searrow$	0 (极小)	$\nearrow$

铅直渐近线 $x=1$

斜渐近线 $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$

特殊点

x	0	2
y	$-\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$



目录 上页 下页 返回 结束

例5. 描绘函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

解: 1) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 图形对称于 y 轴.

2) 求关键点

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\qquad y''=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$$

令 $y'=0$ 得 $x=0$; 令 $y''=0$ 得 $x=\pm1$

3) 判别曲线形态

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	0	$-$		$-$
y''		$-$	0	$+$
y	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}$	
	(极大)		(拐点)	

目录 上页 下页 返回 结束

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	0	$-$		$-$
y''		$-$	0	$+$
y	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	

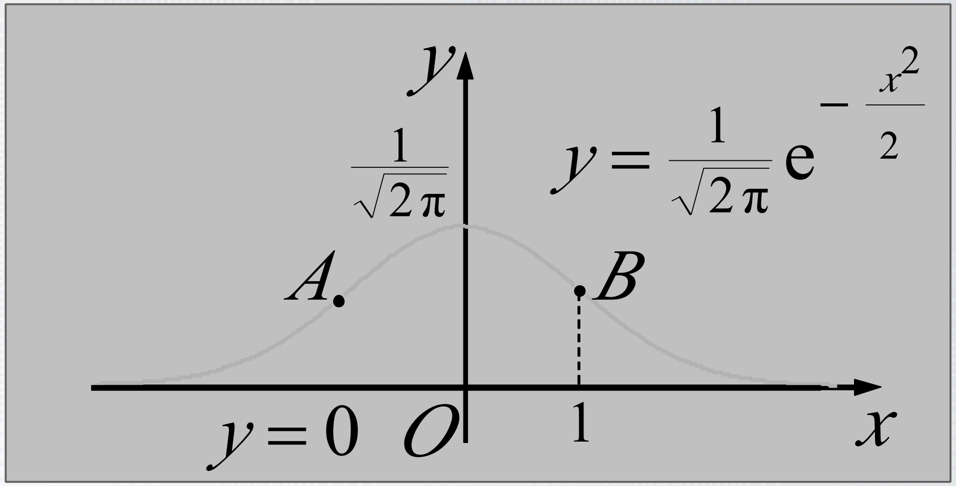
(极大)　　(拐点)

4) 求渐近线

$$\lim_{x\to\infty} y = 0$$

$\therefore y=0$ 为水平渐近线

5) 作图



目录　上页　下页　返回　结束