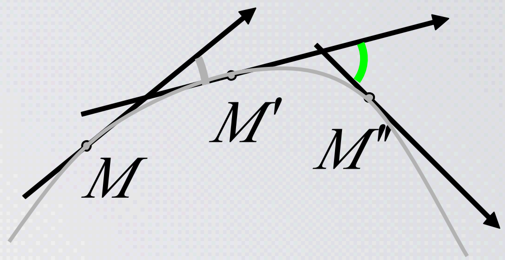
第七节
平面曲线的曲率

曲线的弯曲程度 $\left\{\begin{array}{l}\text{与切线的转角有关}\\ \text{与曲线的弧长有关}\end{array}\right.$

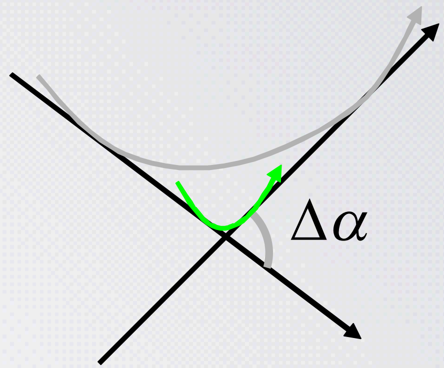


主要内容：

一、 弧微分

二、 曲率及其计算公式

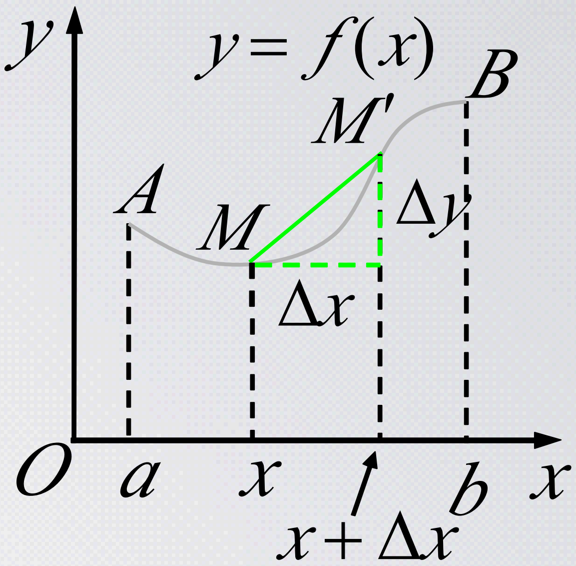
三、 曲率圆与曲率半径



一、 弧微分

设 $y=f(x)$ 在(a,b)内有连续导数, 其图形为 $\overset{\frown}{AB}$,

弧长 $s=\overset{\frown}{AM}=s(x)$



$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\cdot\frac{|MM'|}{\Delta x}$$

$$=\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\cdot\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta x}$$

$$=\pm\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\sqrt{1+(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}=\pm 1$$

$$\therefore\ s'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}=\sqrt{1+(y')^2}$$

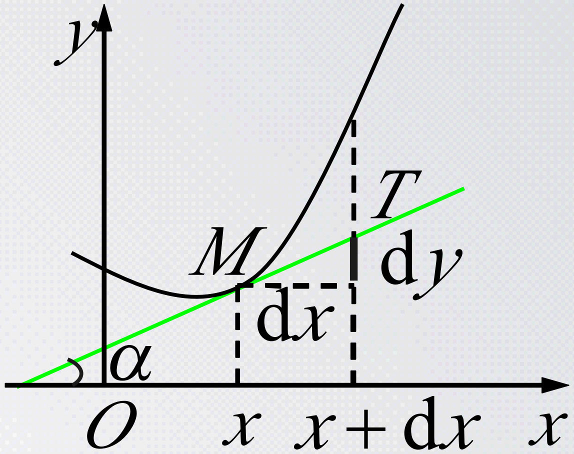
$$s'(x) = \sqrt{1+(y')^2}$$

$$\therefore \quad \mathrm{d}s = \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x \quad 或 \quad \mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$$

若曲线由参数方程表示: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$\dot{x}$ 表示对参数 t 的导数

则弧长微分公式为 $\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$



几何意义: $\mathrm{d}s = |MT|$

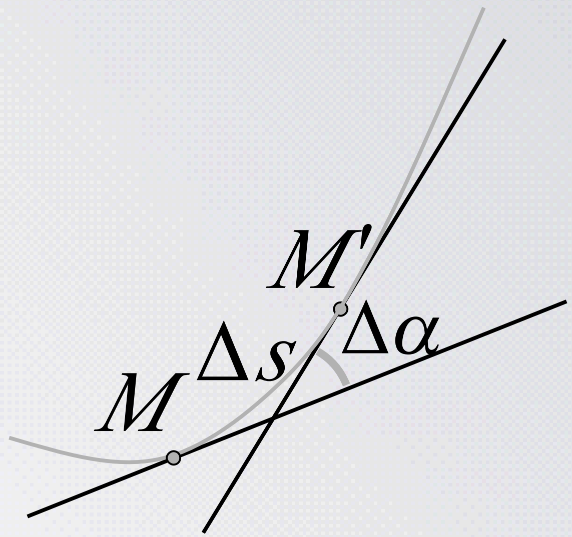
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha \,; \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha$$

二、曲率及其计算公式

在光滑弧上自点 M 开始取弧段, 其长为 Δs, 对应切线转角为 $\Delta\alpha$, 定义

弧段 Δs 上的平均曲率

$$\overline{K} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

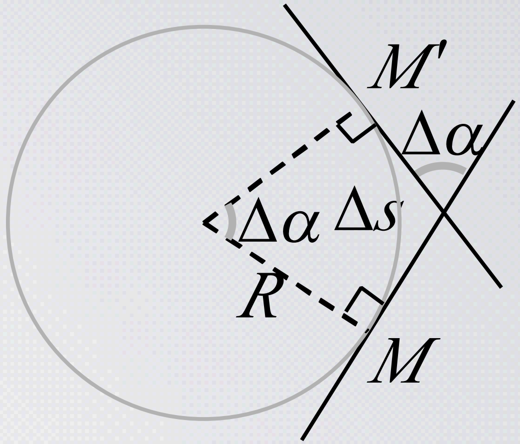


点 M 处的曲率

$$K = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$$

注意: 直线上任意点处的曲率为 0 !

例1. 求半径为R的圆上任意点处的曲率 .



解: 如图所示 ,

$$\Delta s = R\Delta\alpha$$

$$\therefore \quad K = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \frac{1}{R}$$

可见: R 愈小, 则K 愈大 , 圆弧弯曲得愈厉害 ;

R 愈大, 则K 愈小 , 圆弧弯曲得愈小 .

曲率*K*的计算公式

$$K = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$$

设曲线弧 $y = f(x)$ 二阶可导, 则由

$$\tan\alpha = y' \quad (\text{设} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

得 $\alpha = \arctan y'$

$$\mathrm{d}\alpha = (\arctan y')'\,\mathrm{d}x = \frac{y''}{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

又 $\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$

故曲率计算公式为 $K = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

当 $|y'| \ll 1$ 时, 有曲率近似计算公式 $K \approx |y''|$

说明:

(1) 若曲线由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 给出, 则

$$K = \frac{\left| \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} \right|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

(2) 若曲线方程为 $x = \varphi(y)$, 则

$$K = \frac{\left| x'' \right|}{(1 + x'^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{K = \frac{\left| y'' \right|}{(1 + y'^2)^{3/2}}}$$

例2. 我国铁路常用立方抛物线 $y=\dfrac{1}{6Rl}x^3$ 作缓和曲线, 其中R是圆弧弯道的半径, l是缓和曲线的长度, 且 $l << R$. 求此缓和曲线在其两个端点 $O(0,0), B(l, \dfrac{l^2}{6R})$ 处的曲率.

说明:

铁路转弯时为保证行车平稳安全, 离心力必须连续变化, 因此铁道的曲率应连续变化 .

例2. 我国铁路常用立方抛物线 $y=\dfrac{1}{6Rl}x^3$ 作缓和曲线，其中 R 是圆弧弯道的半径，l 是缓和曲线的长度，且 $l \ll R$. 求此缓和曲线在其两个端点 $O(0,0),\ B(l,\dfrac{l^2}{6R})$ 处的曲率.

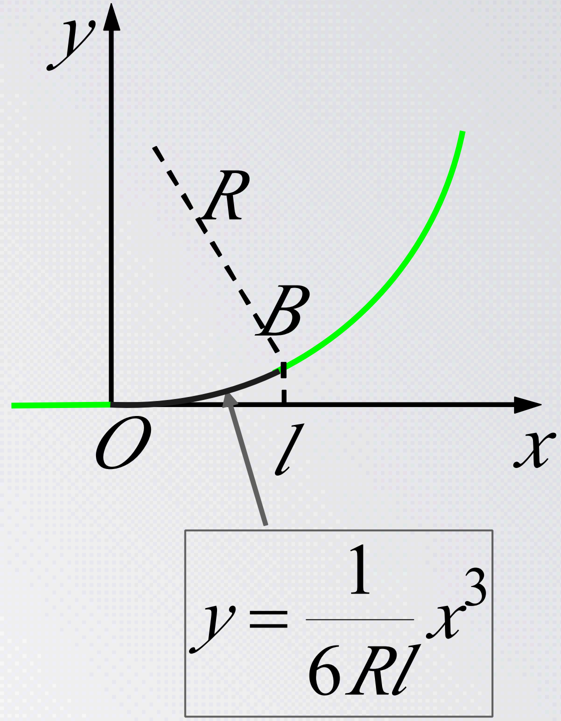
解: 当 $x\in[0,l]$ 时,

$$\because\quad y'=\frac{1}{2Rl}x^2\le\frac{l}{2R}\approx 0$$

$$y''=\frac{1}{Rl}x$$

$$\therefore\quad K\approx\left|y''\right|=\frac{1}{Rl}x$$

显然 $\quad K\big|_{x=0}=0;\qquad K\big|_{x=l}\approx\dfrac{1}{R}$



目录 上页 下页 返回 结束

例**3.** 求椭圆 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 在何处曲率最大?

解: $\dot{x} = -a\sin t;\qquad \ddot{x} = -a\cos t$

$\dot{y} = b\cos t;\qquad \ddot{y} = -b\sin t$

故曲率为

$$K = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

$$K\text{最大} \Longleftrightarrow f(t) = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t \text{ 最小}$$

求驻点:

$$f'(t) = 2a^2\sin t\cos t - 2b^2\cos t\sin t \;= (a^2 - b^2)\sin 2t$$

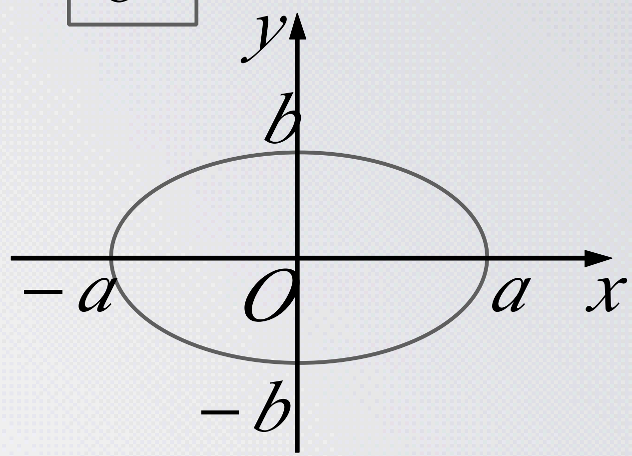
令 $f'(t)=0$, 得 $t=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi$

计算驻点处的函数值:

t	$\boxed{0}$	$\frac{\pi}{2}$	$\boxed{\pi}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\boxed{2\pi}$
$f(t)$	$\boxed{b^2}$	a^2	$\boxed{b^2}$	a^2	$\boxed{b^2}$

设 $0<b<a$, 则 $t=0,\pi,2\pi$ 时 $f(t)$ 取最小值 , 从而 K 取最大值 .

这说明椭圆在点 $(\pm a,0)$ 处曲率最大.

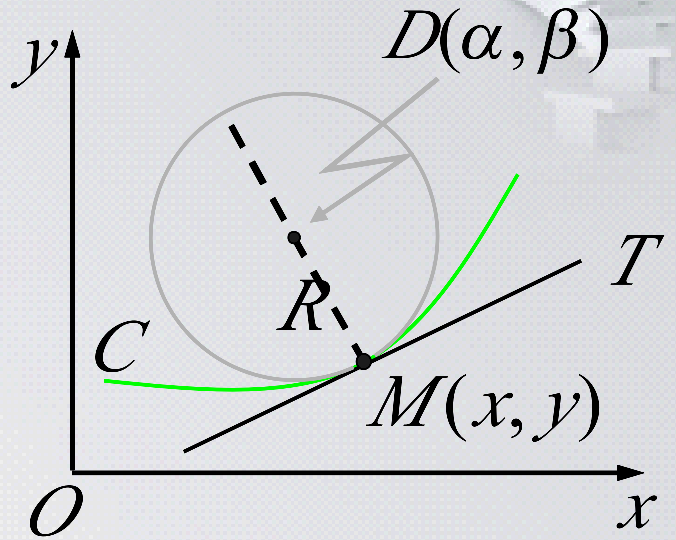


$$K\text{最大} \rightleftarrows f(t)=a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\ \text{最小}$$

$$f'(t)=(a^2-b^2)\sin 2t$$

三、 曲率圆与曲率半径

设 M 为曲线 C 上任一点，在点 M 处作曲线的切线和法线，在曲线的凹向一侧法线上取点 D 使



$$|DM| = R = \frac{1}{K}$$

把以 D 为中心，R 为半径的圆叫做曲线在点 M 处的曲率圆（密切圆），R 叫做曲率半径，D 叫做曲率中心.

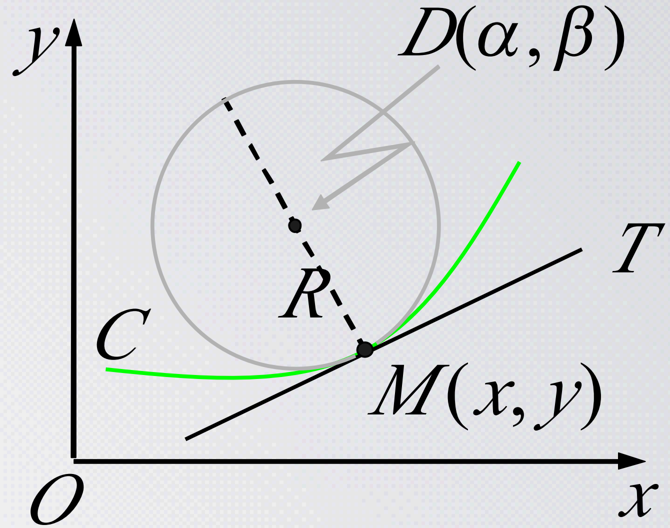
在点 M 处曲率圆与曲线有下列密切关系：

(1) 有公切线；　(2) 凹向一致；　(3) 曲率相同 .

设曲线方程为 $y=f(x)$, 且 $y''\neq 0$, 求曲线上点M处的曲率半径及曲率中心 $D(\alpha,\beta)$ 的坐标公式 .

设点M处的曲率圆方程为

$$(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2=R^2$$



故曲率半径公式为

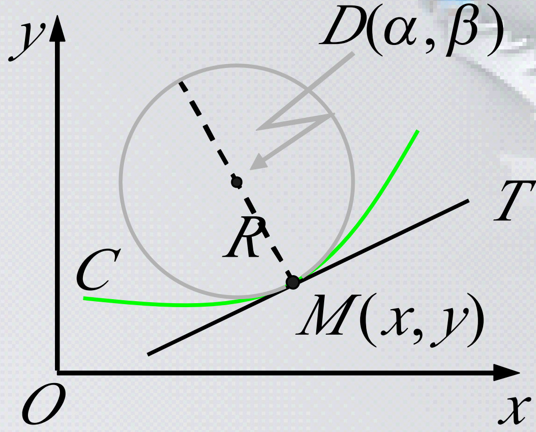
$$\boxed{R=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}}$$

α,β 满足方程组

$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 & (M(x,y)\text{在曲率圆上})\\ y'=-\dfrac{x-\alpha}{y-\beta} & (DM\perp MT)\end{cases}$$

由此可得曲率中心公式

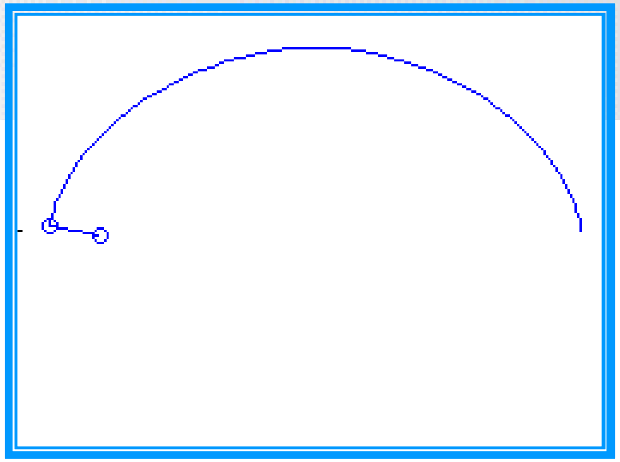
$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{y'(1+y'^2)}{y''} \\ \beta = y + \dfrac{1+y'^2}{y''} \end{cases}$$



(注意 $y-\beta$ 与 y'' 异号)

当点 $M(x,y)$ 沿曲线 $y=f(x)$ 移动时, 相应的曲率中心的轨迹 G 称为曲线 C 的渐屈线，曲线 C 称为曲线 G 的渐伸线 .

曲率中心公式可看成渐屈线的参数方程(参数为x).



点击图中任意点动画开始或暂停

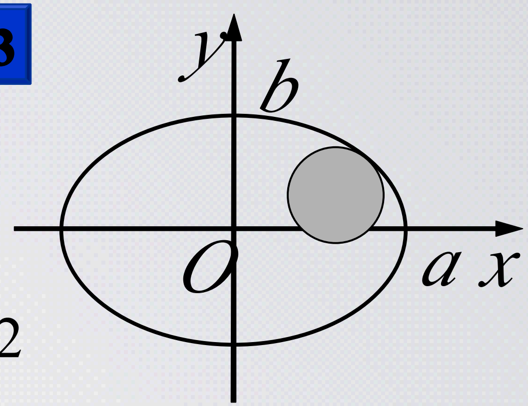
例4. 设一工件内表面的截痕为一椭圆，现要用砂轮磨

削其内表面，问选择多大的砂轮比较合适？

解：设椭圆方程为 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(0 \le x \le 2\pi, b \le a)$

例3

由例3可知，椭圆在 $(\pm a, 0)$ 处曲率最大，



即曲率半径最小，且为

$$R = \left. \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab} \right|_{t=0} = \frac{b^2}{a}$$

显然，砂轮半径不超过 $\dfrac{b^2}{a}$ 时，才不会产生过量磨损，

或有的地方磨不到的问题.

例5. 求摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ 的渐屈线方程 . 摆线

解: $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$, $\quad y'' = \dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(y')}{\dot{x}} = \dfrac{-1}{a(1-\cos t)^2}$

代入曲率中心公式, 得渐屈线方程

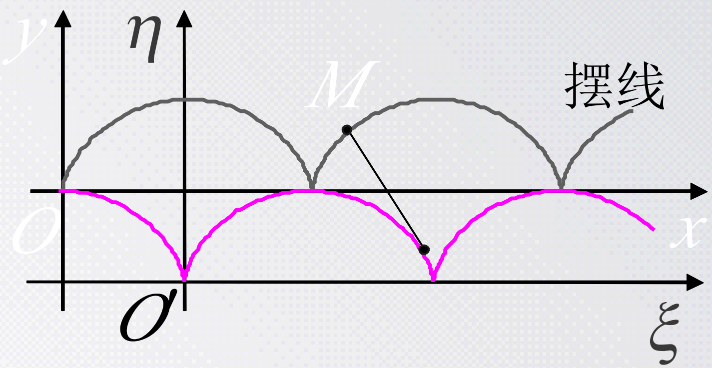
$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{y'(1+y'^2)}{y''} \\ \beta = y + \dfrac{1+y'^2}{y''} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = a(t+\sin t) \\ \beta = a(\cos t - 1) \end{cases}$$

令 $t = \pi + \tau$, $\begin{cases} \xi = \alpha - \pi a \\ \eta = \beta + 2a \end{cases}$

$$\begin{cases} \xi = a(\tau - \sin \tau) \\ \eta = a(1-\cos \tau) \end{cases}$$

(仍为摆线)



摆线 目录 上页 下页 返回 结束