第四节 有理函数的积分

• 基本积分法：直接积分法； 换元积分法；
分部积分法

• 初等函数 —求导→ 初等函数
积分（不一定为初等函数）

本节内容:

一、有理函数的积分

二、可化为有理函数的积分举例

一、 有理函数的积分

有理函数:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

$m\le n$ 时, $R(x)$ 为假分式; $m>n$ 时, $R(x)$ 为真分式

有理函数 $\underset{\text{相除}}{=\!=\!=}$ 多项式 + 真分式

真分式 $\xrightarrow{\text{分解}}$ 若干部分分式之和

其中部分分式的形式为

$$\frac{A}{(x-a)^k};\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\quad (k\in\mathbf{N}^+,\ p^2-4q<0)$$

例1. 将下列真分式分解为部分分式：

(1) $\dfrac{1}{x(x-1)^2}$;　(2) $\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}$;　(3) $\dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)}$.

解: (1) 用拼凑法

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{x-(x-1)}{x(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x(x-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}$$

目录 上页 下页 返回 结束

(2) 用赋值法

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

$$\therefore\quad A=(x-2)\cdot\text{原式}\Big|_{x=2}=\frac{x+3}{x-3}\Big|_{x=2}=-5$$

$$B=(x-3)\cdot\text{原式}\Big|_{x=3}=\frac{x+3}{x-2}\Big|_{x=3}=6$$

故 $\quad\text{原式}=\dfrac{-5}{x-2}+\dfrac{6}{x-3}$

(3) 混合法

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$A=(1+2x)\cdot 原式\Big|_{x=-\frac{1}{2}}=\frac{4}{5}$$

分别令 $x=0,1$ 代入等式两端

$$\begin{cases} 1=\frac{4}{5}+C \\ \frac{1}{6}=\frac{4}{15}+\frac{B+C}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B=-\frac{2}{5} \\ C=\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$原式=\frac{1}{5}\left[\frac{4}{1+2x}-\frac{2x-1}{1+x^2}\right]$$

四种典型部分分式的积分:

1. $\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = \frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n} + C \quad (n \neq 1)$

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$

4. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$

$(p^2 - 4q < 0, n \neq 1)$

$(x^2+px+q)' = 2x+p$

变分子为

$\frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2}$

再分项积分

例2. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+2x)(1+x^2)}$.

解：已知

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{1}{5}\left[\frac{4}{1+2x} - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right]$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}(1+2x)}{1+2x} - \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C$$

例**3.** 求 $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$.

解：原式 $=\int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}-3\int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right|-\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$$

思考：如何求 $\int \frac{x-2}{(x^2+2x+3)^2}\mathrm{d}x$?

提示：变形方法同例3, 并利用书 P363 公式20 .

说明：将有理函数分解为部分分式进行积分虽可行，但不一定简便，因此要注意根据被积函数的结构寻求简便的方法.

例4. 求 $I=\int\frac{2x^3+2x^2+5x+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x.$

解： $I=\int\frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x+\int\frac{2x^2+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^4+5x^2+5)}{x^4+5x^2+4}+\int\frac{(x^2+1)+(x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^4+5x^2+4\right|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+\arctan x+C$$

例5. 求 $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$.

解：原式 $=\int \frac{(x^2+2x+2)-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1}-\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$=\arctan(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+2}+C$$

例6. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

解：原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}\mathrm{d}x$

注意本题技巧

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + C \quad (x \neq 0)$$

常规法 目录 上页 下页 返回 结束

按常规方法解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

第一步 令 $x^4+1=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

比较系数定 a, b, c, d. 得

$$x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

第二步 化为部分分式. 即令

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

$$=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

比较系数定 A, B, C, D.

第三步 分项积分. 此解法较繁!

二、可化为有理函数的积分举例

1. 三角函数有理式的积分

设 $R(\sin x, \cos x)$ 表示三角函数有理式，则

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$$

↓ 令 $t = \tan\frac{x}{2}$

万能代换
(参考下页例7)

t 的有理函数的积分

例7. 求 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,dx$$

$$= \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}(1+\frac{1-t^2}{1+t^2})} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2+2t+\ln\left|t\right|\right)+C$$

$$= \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

目录 上页 下页 返回 结束

例8. 求 $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\ (ab \neq 0)$.

解: 原式 $= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}dx}{a^2\tan^2 x + b^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{d\tan x}{\tan^2 x + (\frac{b}{a})^2}$

$$= \frac{1}{ab}\arctan(\frac{a}{b}\tan x) + C$$

说明: 通常求含 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 及 $\sin x\cos x$ 的有理式的积分时, 用代换 $t = \tan x$ 往往更方便 .

例9. 求 $\int \frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x \ (ab\neq 0)$.

解法 1

原式 $=\int \frac{\mathrm{d}x}{(a\tan x+b)^2\cos^2 x}$

令 $t=\tan x$

$$=\int \frac{\mathrm{d}t}{(at+b)^2} = -\frac{1}{a(at+b)}+C$$

$$=-\frac{\cos x}{a(a\sin x+b\cos x)}+C$$

例9. 求 $\int \frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x \quad (ab\neq 0)$

解法 2　令 $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$

$$原式=\frac{1}{a^2+b^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x-\varphi)}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\tan(x-\varphi)+C$$

$$\varphi=\arctan\frac{a}{b}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\tan(x-\arctan\frac{a}{b})+C$$

例**10.** 求 $\int \frac{\cos^3 x - 2\cos x}{1+\sin^2 x + \sin^4 x}\,\mathrm{d}x$.

解: 因被积函数关于 $\cos x$ 为奇函数, 可令 $t=\sin x$,

$$原式 = \int \frac{(\cos^2 x - 2)\cos x\,\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x} = -\int \frac{(\sin^2 x + 1)\,\mathrm{d}\sin x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}$$

$$= -\int \frac{(t^2+1)\,\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4} = -\int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+1+\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{\mathrm{d}(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+3}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}\sin x} + C$$

2. 简单无理函数的积分

被积函数为简单根式的有理式，可通过根式代换化为有理函数的积分. 例如:

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{d}x, \quad 令 \quad t=\sqrt[n]{ax+b}$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x, \quad 令 \quad t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b})\,\mathrm{d}x,$$

令 $t=\sqrt[p]{ax+b}$, p为m, n的最小公倍数.

目录 上页 下页 返回 结束

例11. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

解: 令 $u=\sqrt[3]{x+2}$, 则 $x=u^3-2$, $\mathrm{d}x=3u^2\,\mathrm{d}u$

$$\text{原式} = \int \frac{3u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u = 3\int \frac{(u^2-1)+1}{1+u}\mathrm{d}u$$

$$= 3\int (u-1+\frac{1}{1+u})\,\mathrm{d}u$$

$$= 3[\ \tfrac{1}{2}u^2 - u + \ln|1+u|\ ] + C$$

$$= \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2} - 3\sqrt[3]{x+2}$$

$$+ 3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+2}\right| + C$$

例**12.** 求

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$$

解: 为去掉被积函数分母中的根式，取根指数 2 , 3 的最小公倍数 6， 令 $x=t^6$，则有

$$\text{原式} = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2}$$

$$= 6\int (t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t})\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\left[\tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{2}t^2 + t - \ln|1+t|\right] + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + C$$

例13. 求 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$，则 $x=\frac{1}{t^2-1}$，$\mathrm{d}x=\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$

$$\text{原式}=\int (t^2-1)\cdot t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \quad =-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+\ln\left|2x+2x\sqrt{x+1}+1\right|+C$$