

第五节

积分表的使用

积分计算比导数计算灵活复杂,为提高求积分的效率,已把常用积分公式汇集成表,以备查用.

积分表的结构: 按被积函数类型排列

积分表的使用: 1) 注意公式的条件

2) 注意简单变形的技巧

注: 很多不定积分也可通过 Mathematica , Maple 等数学软件的符号演算功能求得 .



例1. 求 $\int \frac{d x}{5-4 \cos x}$.

解: 这里 $a=5, b=-4$, 应使用P368 公式105 .

$$\begin{aligned} & \int \frac{d x}{5-4 \cos x} \\ &= \frac{2}{5+(-4)} \sqrt{\frac{5+(-4)}{5-(-4)}} \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{5+(-4)}{5-(-4)}} \tan \frac{x}{2}\right) + C \\ &= \frac{2}{3} \arctan\left(3 \tan \frac{x}{2}\right) + C \end{aligned}$$

例2. 求 $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}}$.

解法1 令 $u=2x$, 则

$$\text{原式} = \int \frac{\frac{1}{2} du}{\frac{u}{2} \sqrt{u^2+3^2}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+3^2}}$$

(P364 公式 37)

$$= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{u^2+3^2}-3}{u} \right| + C = \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{2|x|} + C$$



例2. 求 $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}}$.

解法2 令 $u = \sqrt{4x^2+9}$, 则 $u^2 = 4x^2+9$, $u du = 4x dx$

原式 $= \int \frac{4x dx}{4x^2\sqrt{4x^2+9}} = \int \frac{du}{u^2-3^2}$ (P363 公式 21)

$$= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{u-3}{u+3} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{\sqrt{4x^2+9}+3} \right| + C$$

$$= \frac{1}{6} \ln \frac{(\sqrt{4x^2+9}-3)^2}{|2x|^2} + C = \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{2|x|} + C$$

例3. 求 $\int \frac{(x+4)dx}{(x^2+2x+4)\sqrt{x^2+2x+5}}$.

解: 令 $x+1=2\tan t$, 则 $dx=2\sec^2 t dt$

$$\text{原式} = \int \frac{2\tan t + 3}{(4\tan^2 t + 3)\cancel{2\sec t}} \cdot \cancel{2\sec^2 t} dt$$

$$= \int \frac{2\sin t + 3\cos t}{4\sin^2 t + 3\cos^2 t} dt$$

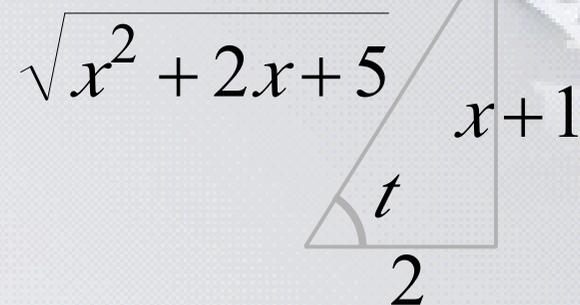
$$= 2 \int \frac{\sin t dt}{4\sin^2 t + 3\cos^2 t} + 3 \int \frac{\cos t dt}{4\sin^2 t + 3\cos^2 t}$$

$$= -2 \int \frac{d\cos t}{4 - \cos^2 t} + 3 \int \frac{d\sin t}{\sin^2 t + 3}$$

$$= -2 \int \frac{d \cos t}{4 - \cos^2 t} + 3 \int \frac{d \sin t}{\sin^2 t + 3}$$

(P363 公式21)

(P363 公式19)



$$x+1 = 2 \tan t$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2 - \cos t}{2 + \cos t} \right| + \sqrt{3} \arctan \left(\frac{\sin t}{\sqrt{3}} \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 5} - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5} + 1} \right| + \sqrt{3} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{3(x^2 + 2x + 5)}} \right) + C$$