第二节 微积分的基本公式

一、引例

二、积分上限的函数及其导数

三、牛顿 – 莱布尼茨公式

一、引例

在变速直线运动中, 已知位置函数 $s(t)$ 与速度函数 $v(t)$ 之间有关系:

$$s'(t) = v(t)$$

物体在时间间隔$[T_1, T_2]$内经过的路程为

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)\,\mathrm{d}\,t = s(T_2) - s(T_1)$$

这里$s(t)$是$v(t)$的原函数 .

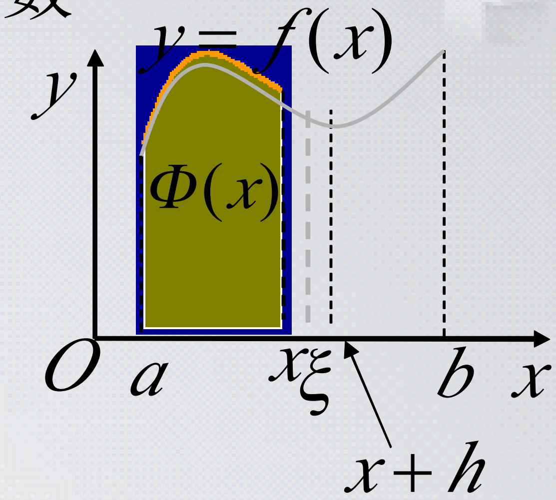
这种积分与原函数的关系在一定条件下具有普遍性 .

二、积分上限的函数及其导数

定理1. 若 $f(x)\in C[a,b]$, 则变上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.



证: $\forall\, x, x+h\in[a,b]$, 则有

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t=f(\xi)\quad(x<\xi<x+h)$$

$\because f(x)\in C[a,b]$

$$\therefore\ \Phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{h\to 0} f(\xi)=f(x)$$

说明:

1) 定理 1 证明了连续函数的原函数是存在的. 同时为通过原函数计算定积分开辟了道路 .

2) 其他变限积分求导:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = -f(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{\psi(x)}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$= f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)$$

例1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\,dt}{x^2}$ $\boxed{\dfrac{0}{0}}$

解: 原式 $\overset{洛}{=} -\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}{2x} = \dfrac{1}{2e}$

例2. 确定常数 a, b, c 的值, 使

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \ln(1+t^2)\,dt}=c\quad(c\neq 0).\qquad \boxed{\frac{0}{0}}$$

解: $\because$ $x\to 0$时, $ax-\sin x\to 0$, $c\neq 0$, $\therefore$ $b=0.$

原式 $\overset{洛}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a-\cos x}{\ln(1+x^2)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a-\cos x}{x^2} = c$

$c\neq 0$, 故 $a=1$. 又由 $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, 得 $c=\frac{1}{2}$.

例**3.** 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续, 且 $f(x)>0$, 证明

$$F(x)=\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \Big/ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在 $(0,+\infty)$ 内为单调递增函数 .

只要证

$F'(x)>0$

证: $$F'(x)=\frac{x f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}$$

$$=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)\,f(t)\,\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}=\frac{f(x)\cdot(x-\xi)\,f(\xi)\,x}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}>0$$

$(0<\xi<x)$

$\therefore\quad F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调增函数.

三、牛顿 – 莱布尼茨公式

定理2. 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ （牛顿 - 莱布尼茨公式）

证：根据定理 1，$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，故

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x + C$$

令 $x = a$，得 $C = F(a)$，因此 $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) - F(a)$

再令 $x = b$，得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} [F(x)]_a^b \overset{\text{或}}{=} F(x)\Big|_a^b$$

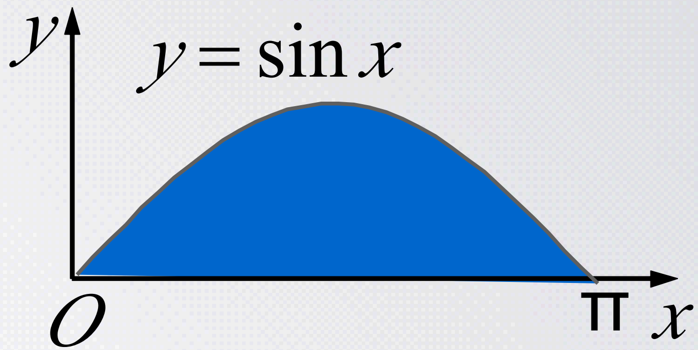
目录 上页 下页 返回 结束

例**4.** 计算$\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解: $\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{-1}^{\sqrt{3}}=\arctan\sqrt{3}-\arctan(-1)$

$$=\frac{\pi}{3}-(-\frac{\pi}{4})=\frac{7}{12}\pi$$

例**5.** 计算正弦曲线 $y=\sin x$在$[0,\pi]$上与x轴所围成的面积 .



解: $A=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$

$$=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(-1-1)=2$$