第四节
反常积分

$$\text{常义积分}\begin{cases}\text{积分限有限}\\ \text{被积函数有界}\end{cases}$$

$\Big\Downarrow$ 推广

反常积分（广义积分）

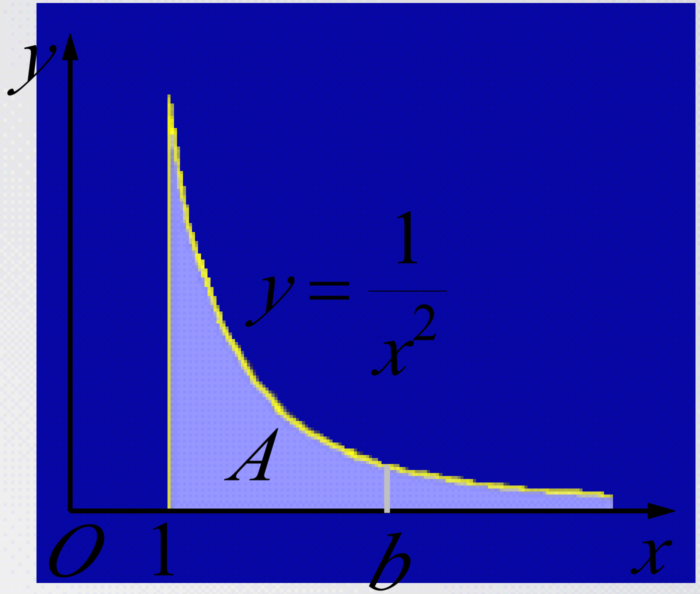
一、无穷限的反常积分

二、无界函数的反常积分

一、无穷限的反常积分

引例. 曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 和直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的开口曲边梯形的面积可记作

$$A=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$



其含义可理解为

$$A=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)_1^{b}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1$$

定义1. 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$, 取 $b>a$, 若

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为 $f(x)$ 的无穷限反常积分，记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

这时称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛；如果上述极限不存在，就称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散 .

类似地，若 $f(x)\in C(-\infty,b]$，则定义

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

若 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(c 为任意取定的常数)

只要有一个极限不存在 , 就称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散 .

无穷限的反常积分也称为第一类反常积分.

说明: 上述定义中若出现 $\infty-\infty$,并非不定型 ,

它表明该反常积分发散 .

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，引入记号

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)\,; \quad F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

则有类似牛–莱公式的计算表达式：

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty)-F(a)$$

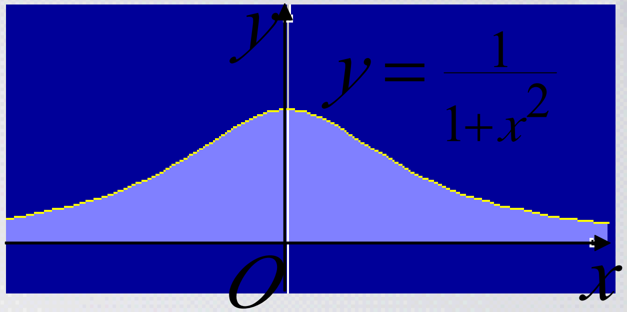
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b)-F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty)-F(-\infty)$$

例1. 计算反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=[\arctan x]_{-\infty}^{+\infty}$

$$=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$$



思考: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}\cancel{=}0$ 对吗?

分析: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ 原积分发散！

注意: 对反常积分, 只有在收敛的条件下才能使用

"偶倍奇零" 的性质, 否则会出现错误 .

例2. 证明第一类 p 积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛；$p\leqslant 1$ 时发散 .

证: 当 $p=1$ 时有

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\left[\ln|x|\right]_a^{+\infty}=+\infty$$

当 $p\neq 1$ 时有

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1\\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1\end{cases}$$

因此, 当 $p>1$ 时, 反常积分收敛 , 其值为 $\frac{a^{1-p}}{p-1}$;

当 $p\leqslant 1$ 时, 反常积分发散 .

例3. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\,(p>0)$.

解: 原式 $= -\dfrac{t}{p}\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + \dfrac{1}{p}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$

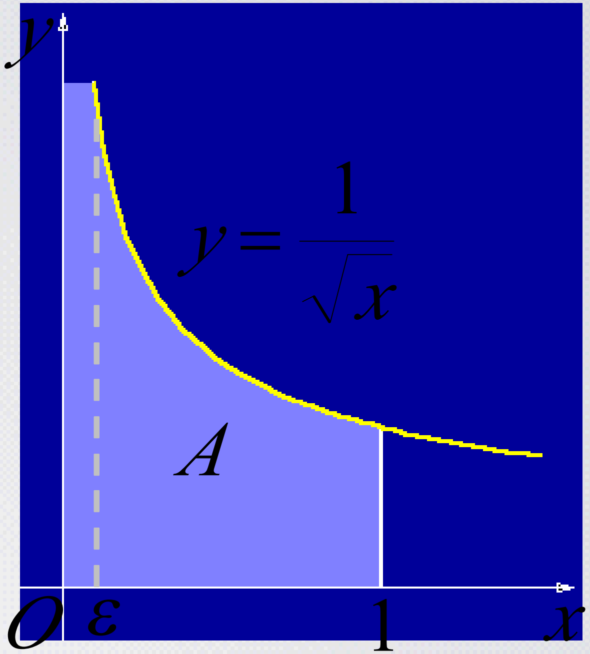
$$= -\frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{p^2}$$

二、无界函数的反常积分

引例:曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 与 x 轴, y 轴和直线 $x=1$ 所围成的开口曲边梯形的面积可记作

$$A=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$



其含义可理解为

$$A=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}2(1-\sqrt{\varepsilon})=2$$

定义2. 设 $f(x)\in C(a,b]$, 而在点 a 的右邻域内无界, 取 $\varepsilon>0$, 若极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的反常积分，记作

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x$$

这时称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 ; 如果上述极限不存在, 就称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散 .

类似地 , 若 $f(x)\in C[a,b)$, 而在 b 的左邻域内无界, 则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x$$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 $c(a<c<b)$ 外连续, 而在点 c 的邻域内无界 , 则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

无界函数的积分又称作第二类反常积分, 无界点常称为瑕点(奇点) .

说明: 若被积函数在积分区间上仅存在有限个第一类间断点, 则本质上是常义积分, 而不是反常积分.

例如, $\int_{-1}^1 \dfrac{x^2-1}{x-1}\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 (x+1)\,\mathrm{d}x$

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则也有类似牛 – 莱公式的计算表达式：

若 b 为瑕点，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a)$

若 a 为瑕点，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a^+)$

若 a，b 都为瑕点，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a^+)$$

注意： 若瑕点 $c \in (a, b)$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) \underline{- F(c^+) + F(c^-)} - F(a)$$

可相消吗?

例4. 计算反常积分$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $(a > 0)$.

解: 显然瑕点为 a, 所以

$$\text{原式} = \left[\arcsin \frac{x}{a} \right]_0^{a^-} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

例5. 讨论反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的收敛性 .

解: $$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{0^-} + \left[-\frac{1}{x} \right]_{0^+}^{1} = \infty$$

所以反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 发散 .

例6. 证明反常积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$ 当 $q<1$ 时收敛；$q\geqslant 1$ 时发散 .

证: 当 $q=1$ 时, $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \left[\ln|x-a|\right]_{a^+}^{b} = +\infty$

当 $q\neq 1$ 时

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q} = \left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_{a^+}^{b} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1 \\ +\infty, & q>1 \end{cases}$$

所以当 $q<1$ 时, 该广义积分收敛 , 其值为 $\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$;

当 $q\geqslant 1$ 时, 该广义积分发散 .