第二节 定积分在几何学上的应用

一、 平面图形的面积

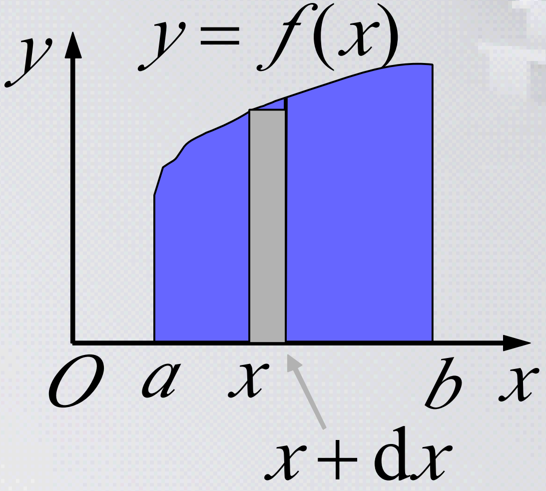
二、 平面曲线的弧长

三、 已知平行截面面积函数的立体体积

一、平面图形的面积

1. 直角坐标情形

设曲线 $y = f(x)\ (\geq 0)$ 与直线 $x = a, x = b\ (a < b)$ 及 x 轴所围曲边梯形面积为 A，则

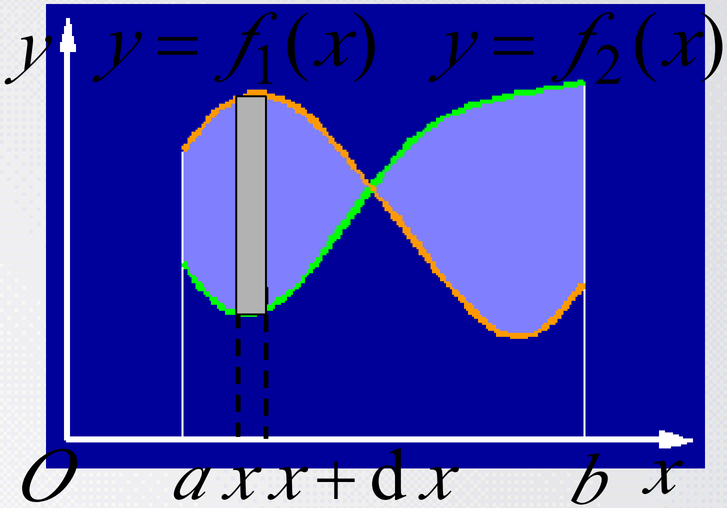


$$\mathrm{d}A = f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

右下图所示图形面积为

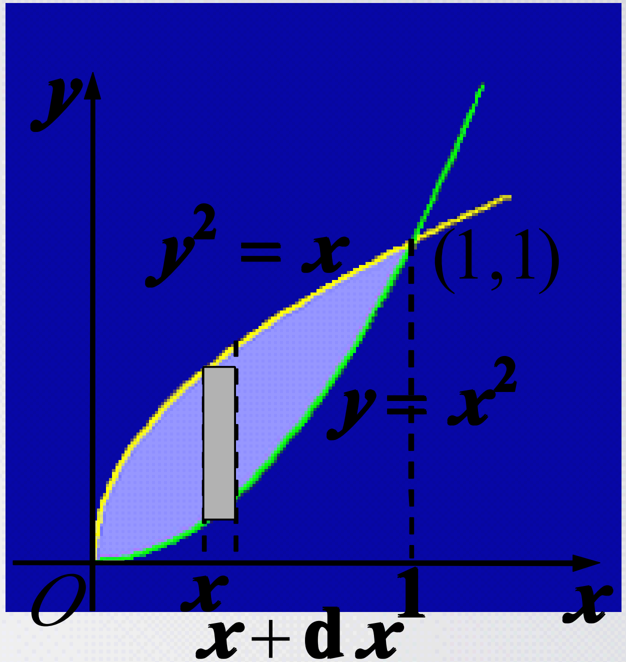
$$A = \int_a^b \left| f_1(x) - f_2(x) \right| \mathrm{d}x$$



例1. 计算两条抛物线 $y^2 = x, y = x^2$ 在第一象限所围图形的面积 .

解: 由 $\begin{cases} y^2 = x \\ y = x^2 \end{cases}$

得交点 $(0, 0)$, $(1, 1)$



$$\therefore \quad A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1$$

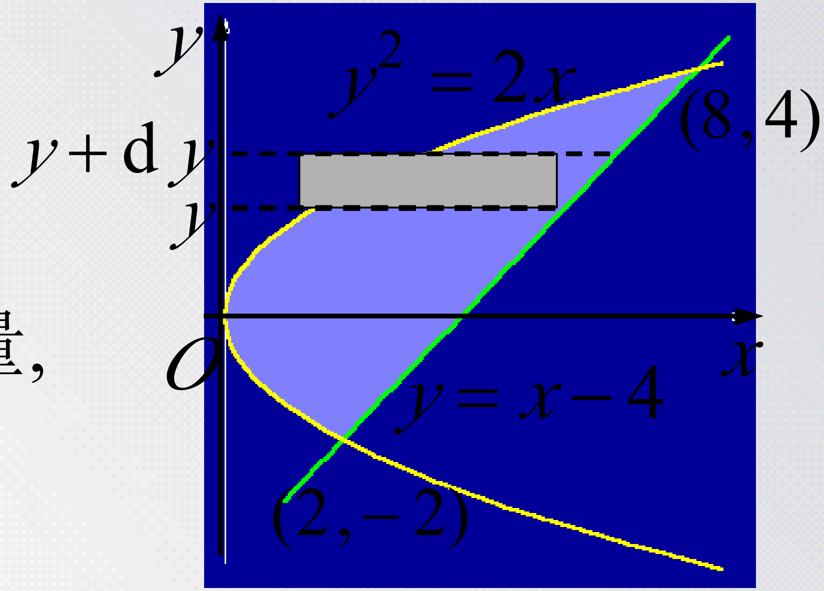
$$= \frac{1}{3}$$

目录 上页 下页 返回 结束

例2. 计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围图形的面积 .

解: 由 $\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases}$ 得交点

$(2,-2),(8,4)$



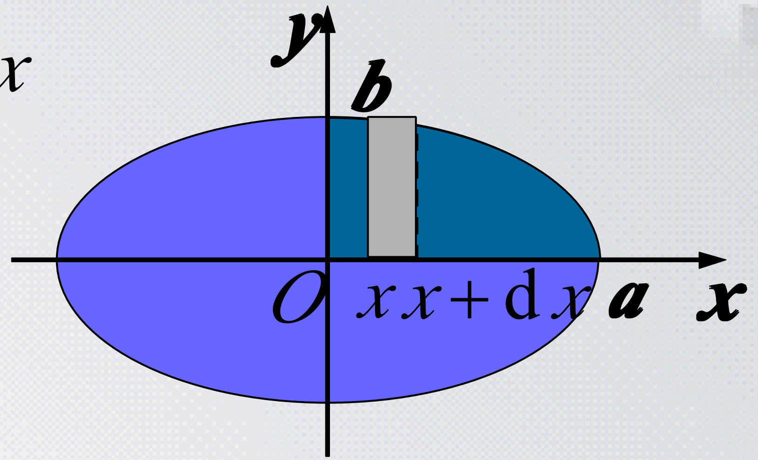
为简便计算, 选取 y 作积分变量, 则有

$$\therefore \quad A=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\tfrac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$=\left[\tfrac{1}{2}y^2+4y-\tfrac{1}{6}y^3\right]_{-2}^{4}=18$$

例3. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形的面积 .

解: 利用对称性 , 有 $\mathrm{d}A=y\,\mathrm{d}x$



$$A=4\int_0^a y\,\mathrm{d}x$$

利用椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi)$$

应用定积分换元法得

$$A=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\cdot(-a\sin t)\,\mathrm{d}t=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

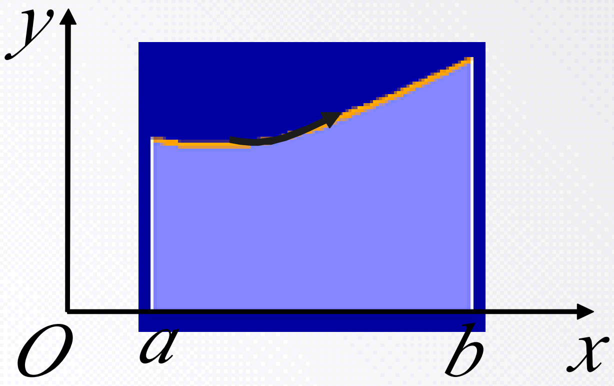
$$=4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab$$

当 $a=b$ 时得圆面积公式

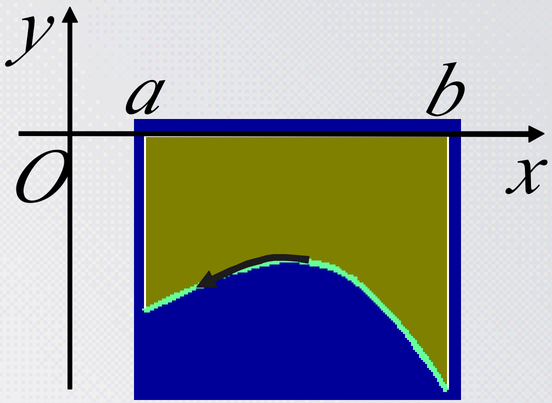
一般地，当曲边梯形的曲边由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

给出时，按顺时针方向规定起点和终点的参数值 t_1, t_2



$(t_1$ 对应 $x = a)$



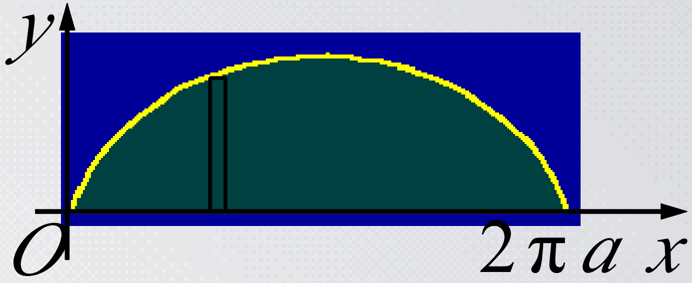
$(t_1$ 对应 $x = b)$

则曲边梯形面积 $A = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t$

例4. 求由摆线 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ (a>0)$ 的一拱与 x 轴所围平面图形的面积 .

解: $A=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}\,t$

$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}\,t$



$=4a^2\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\,\mathrm{d}\,t$

$=8a^2\int_0^{\pi}\sin^4 u\,\mathrm{d}\,u \qquad (令\ u=\frac{t}{2})$

$=16\,a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\,\mathrm{d}\,u$

$=16a^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=3\pi\,a^2$

2. 极坐标情形

设 $\varphi(\theta)\in C[\alpha,\beta],\varphi(\theta)\geq 0$，求由曲线 $r=\varphi(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 围成的曲边扇形的面积 .

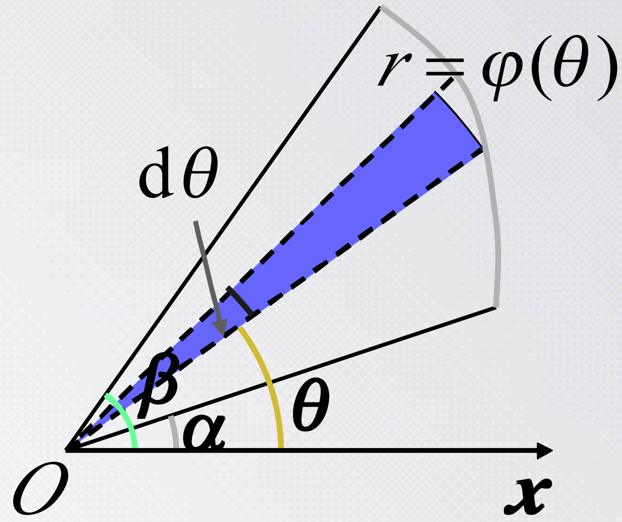
在区间$[\alpha,\beta]$上任取小区间 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$

则对应该小区间上曲边扇形面积的近似值为

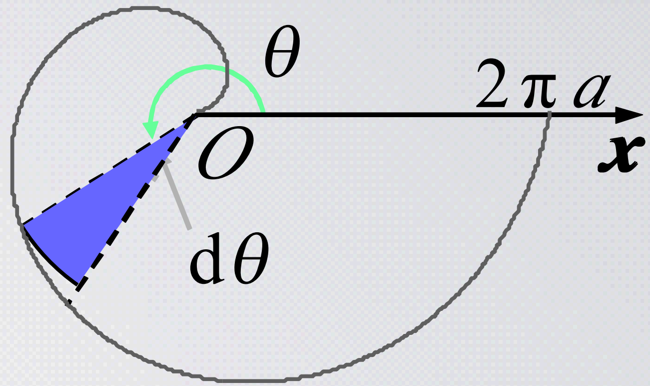
$$\mathrm{d}A=\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta$$

所求曲边扇形的面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$



例5. 计算阿基米德螺线 $r = a\theta\ (a>0)$ 对应 θ 从 0 变到 2π 所围图形面积 .



解: $A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(a\theta)^2 \, \mathrm{d}\theta$

$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{2\pi}$

$= \frac{4}{3}\pi^3 a^2$

例6. 计算心形线 $r = a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 所围图形的面积 .

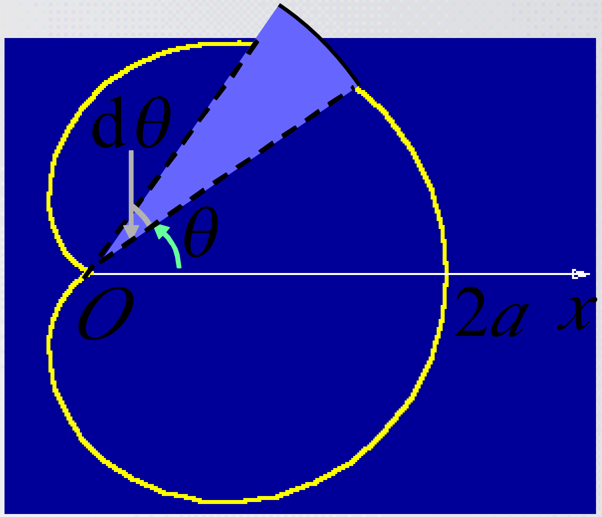
解: $A = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1+\cos\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta$ (利用对称性)

$= a^2 \int_0^{\pi} 4\cos^4\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$

令 $t = \frac{\theta}{2}$

$= 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \,\mathrm{d}t$

$= 8a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^2$



心形线 目录 上页 下页 返回 结束

例7. 计算心形线 $r = a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 与圆 $r=a$ 所围图形的面积 .

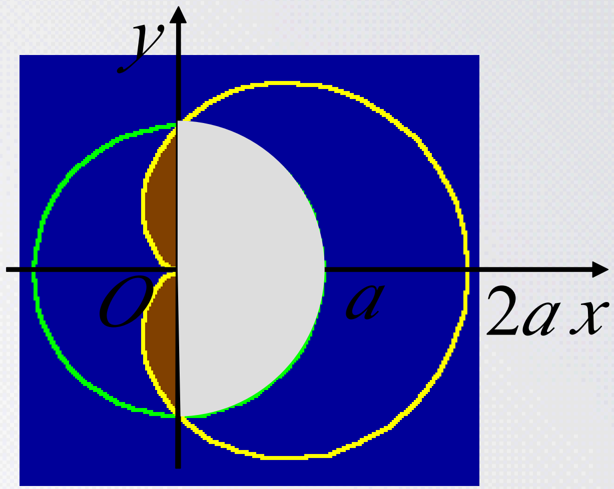
解: 利用对称性，所求面积

$$A = \frac{1}{2}\pi a^2 + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1+\cos\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\pi a^2 + a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\pi a^2 + a^2\left(\frac{3}{4}\pi - 2\right)$$

$$= \frac{5}{4}\pi a^2 - 2a^2$$



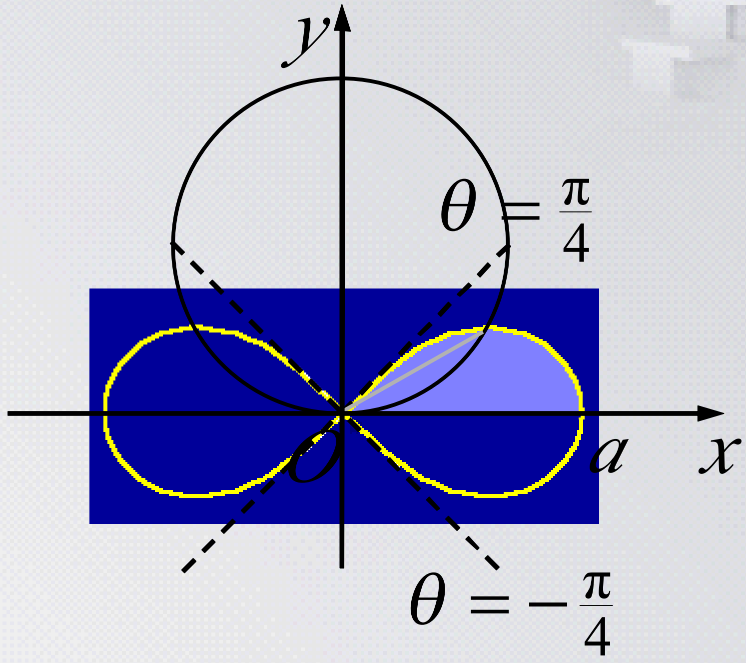
例8. 求双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 所围图形面积 .

解: 利用对称性，则所求面积为

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} a^2 \cos 2\theta \,\mathrm{d}\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \,\mathrm{d}(2\theta)$$

$$= a^2 \left[\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$



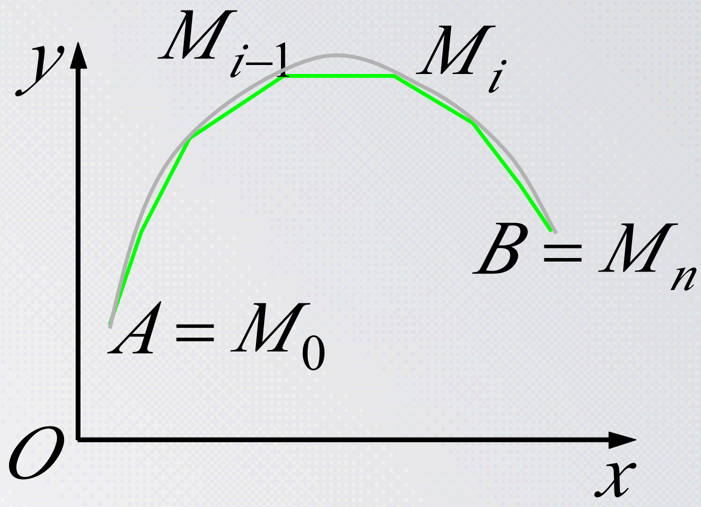
思考: 用定积分表示该双纽线与圆 $r = a\sqrt{2}\sin\theta$ 所围公共部分的面积 .

答案: $A = 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} a^2 \cos 2\theta \,\mathrm{d}\theta\right]$

二、平面曲线的弧长

定义: 若在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意作内接折线，当折线段的最大边长 $\lambda\to 0$ 时，折线的长度趋向于一个确定的极限，则称此极限为曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长，即

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left|M_{i-1}M_i\right|$$



并称此曲线弧为可求长的.

定理: 任意光滑曲线弧都是可求长的.

（证明略）

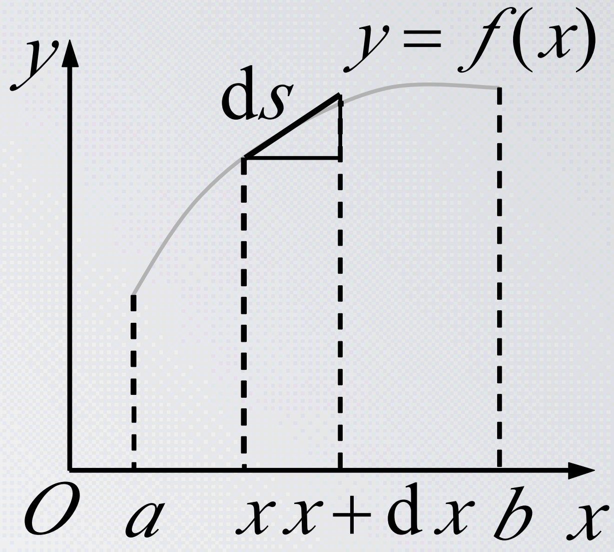
(1) 曲线弧由直角坐标方程给出:

$$y = f(x) \quad (a \le x \le b)$$

弧长元素(弧微分) :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$= \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$



因此所求弧长

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\ \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

(2) 曲线弧由参数方程给出:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

弧长元素(弧微分) :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$= \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

因此所求弧长

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

(3) 曲线弧由极坐标方程给出:

$$r = r(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

令 $x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\sin\theta$, 则得

弧长元素(弧微分) :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \quad \text{(自己验证)}$$

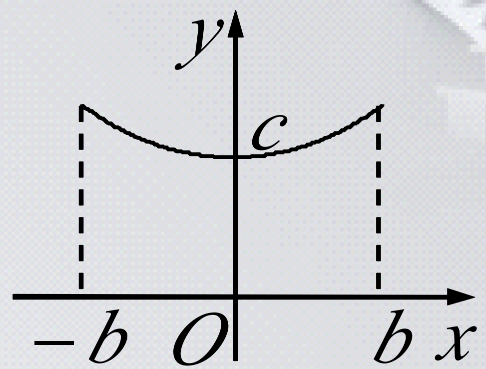
因此所求弧长

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

例9. 两根电线杆之间的电线, 由于其本身的重量,下垂成悬链线 . 悬链线方程为

$$y = c\,\mathrm{ch}\frac{x}{c} \quad (-b \le x \le b)$$

求这一段弧长 .



解: $\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$

$$= \sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{c}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{ch}\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore \quad s = 2\int_0^b \mathrm{ch}\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = 2c\left[\mathrm{sh}\frac{x}{c}\right]_0^b$$

$$= 2c\,\mathrm{sh}\frac{b}{c}$$

$$\mathrm{ch}\,x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

$$\mathrm{sh}\,x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

$$(\mathrm{ch}\,x)' = \mathrm{sh}\,x$$

$$(\mathrm{sh}\,x)' = \mathrm{ch}\,x$$

例**10.** 求连续曲线段 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t$ 的弧长.

解: $\because$ 此题 $\cos x\ge 0$, $\therefore\ -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$

$$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

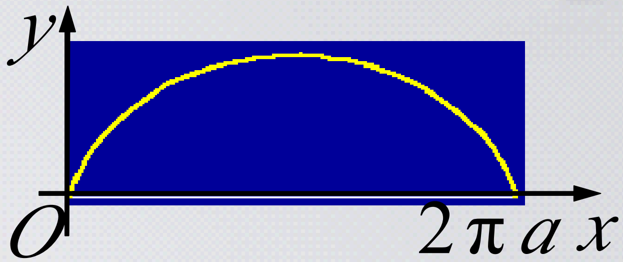
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+(\sqrt{\cos x})^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\sqrt{2}\left[2\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=4$$

例**11.** 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ 一拱 $(0 \le t \le 2\pi)$ 的弧长 .



解: $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$

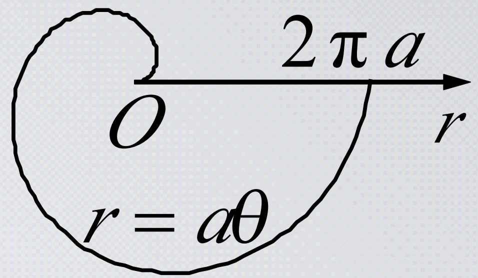
$$= \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt$$

$$= a\sqrt{2(1-\cos t)}\, dt$$

$$= 2a \sin\frac{t}{2}\, dt$$

$$\therefore \quad s = \int_0^{2\pi} 2a \sin\frac{t}{2}\, dt = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a$$

例**12.** 求阿基米德螺线 $r = a\theta \ \ (a>0)$ 相应于 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 一段的弧长 .



解： $\mathrm{d}s = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

$$= \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}\ \mathrm{d}\theta$$

$$= a\sqrt{1+\theta^2}\ \mathrm{d}\theta$$

$$\therefore \quad s = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2}\ \mathrm{d}\theta$$

$$= a\left[\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\theta^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\theta + \sqrt{1+\theta^2}\right|\right]_0^{2\pi}$$

$$= a\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$$

目录 上页 下页 返回 结束

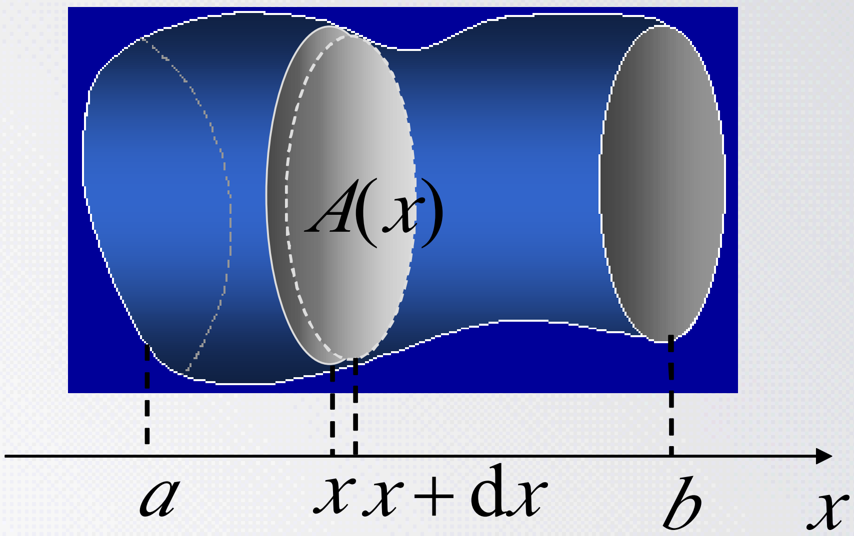
三、已知平行截面面积函数的立体体积

设所给立体垂直于x轴的截面面积为$A(x)$, $A(x)$在$[a,b]$上连续, 则对应于小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$的体积元素为

$$\mathrm{d}V = A(x)\,\mathrm{d}x$$

因此所求立体体积为

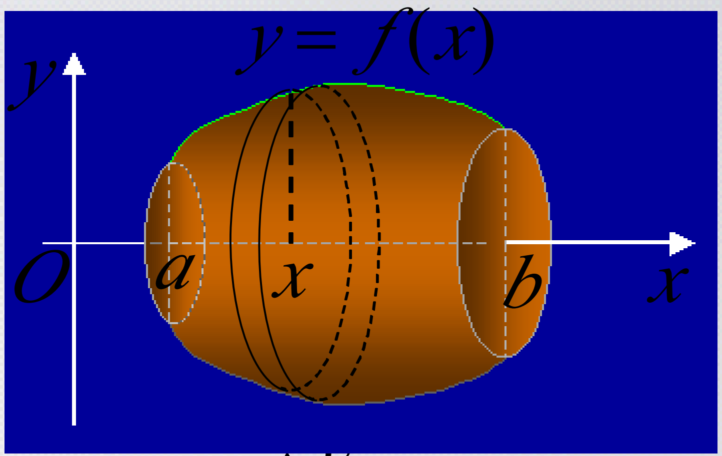
$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$



特别，当考虑连续曲线段 $y = f(x)\ (a \le x \le b)$ 绕 x 轴

轴旋转一周围成的立体体积时，有

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$$



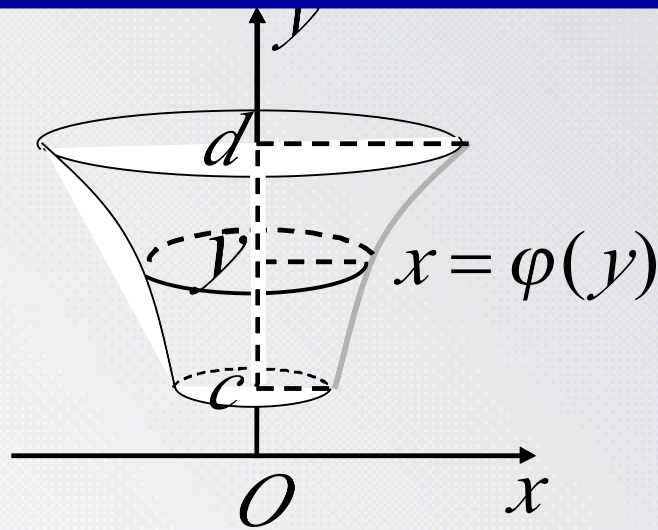
当考虑连续曲线段

$$x = \varphi(y)\ \ (c \le y \le d)$$

绕 y 轴旋转一周围成的立体体积时，

有

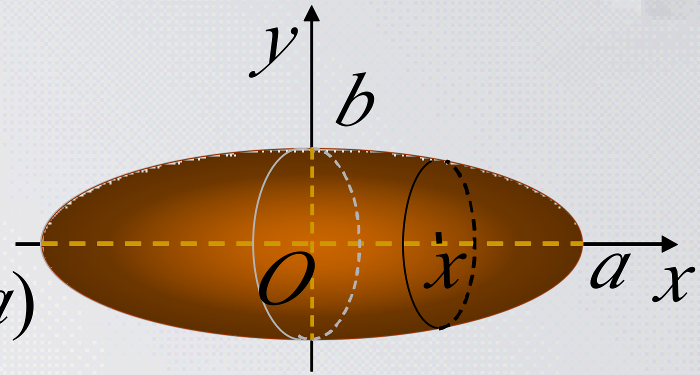
$$V = \int_c^d \pi[\varphi(y)]^2\mathrm{d}y$$



例13. 计算由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形绕 x 轴旋转而转而成的椭球体的体积.

解: 方法1 利用直角坐标方程

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\quad(-a\le x\le a)$$

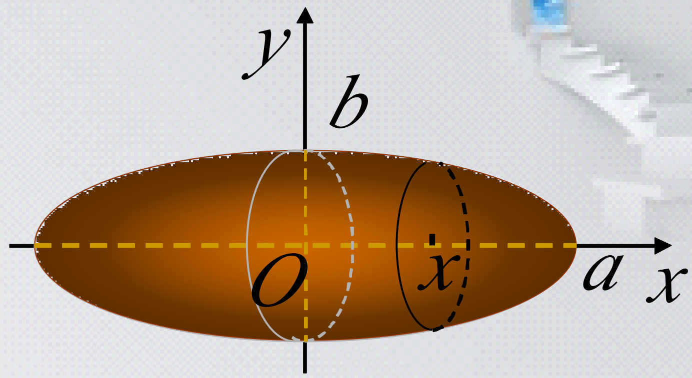


则 $$V=2\int_0^a \pi y^2\,\mathrm{d}x$$ (利用对称性)

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

方法2　利用椭圆参数方程



$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

则　$V = 2\int_0^a \pi y^2 \,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} ab^2 \sin^3 t \,\mathrm{d}t$

$$= 2\pi ab^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

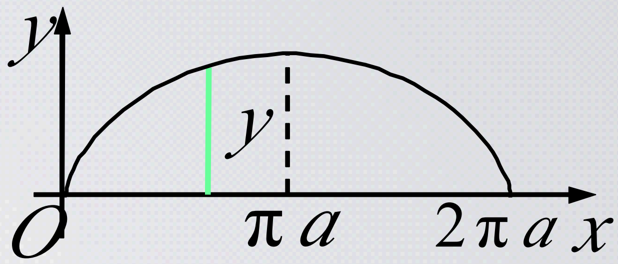
$$= \frac{4}{3}\pi ab^2$$

特别当 $b = a$ 时, 就得半径为 a 的球体的体积 $\frac{4}{3}\pi a^3$.

例**14.** 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ 的一拱与 $y = 0$

所围成的图形分别绕 x 轴，y 轴旋转而成的立体体积 .

解: 绕 x 轴旋转而成的体积为



$$V_x = \int_0^{2\pi a} \pi y^2 \, \mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi a} \pi y^2 \, \mathrm{d}x$$

利用对称性

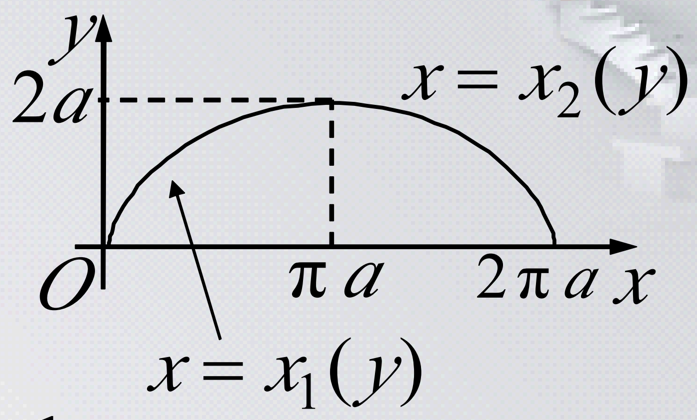
$$= 2\pi \int_0^{\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t) \, \mathrm{d}t$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos t)^3 \, \mathrm{d}t = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t \ (令\ u = \frac{t}{2})$$

$$= 32\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 u \, \mathrm{d}u = 32\pi a^3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= 5\pi^2 a^3$$

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (a > 0)$$



绕 y 轴旋转而成的体积为

$$V_y = \int_0^{2a} \pi\, x_2^2(y)\, \mathrm{d}\, y - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)\, \mathrm{d}\, y$$

$$= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t\, \mathrm{d}\, t$$

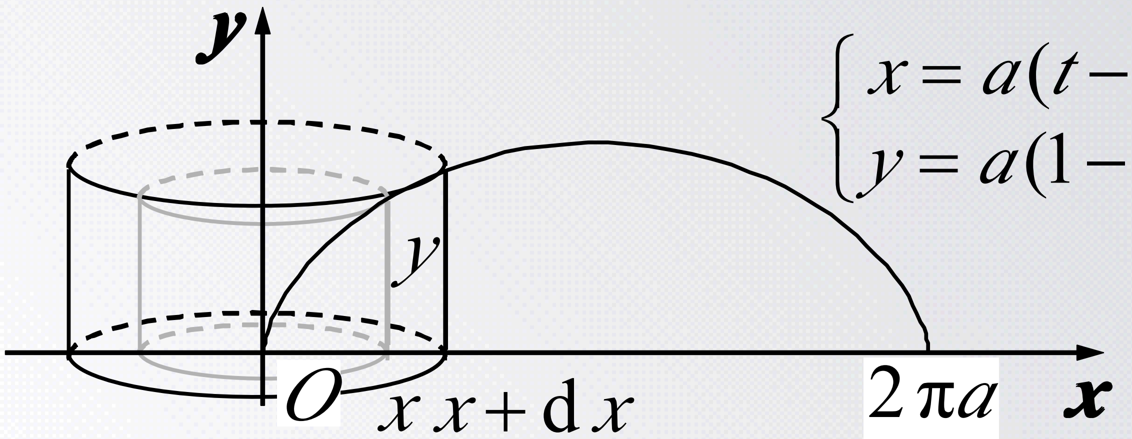
注意上下限！

$$- \pi \int_0^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t\, \mathrm{d}\, t$$

$$= -\pi\, a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t\, \mathrm{d}\, t$$

$$= 6\pi^3 a^3$$

说明：V_y 也可按柱壳法求出



$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

柱面面积 $2\pi x \cdot y$　　　柱壳体积 $2\pi xy \cdot \mathrm{d}x$

$$V_y = 2\pi \int_0^{2\pi a} xy\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \cdot a^2 (1 - \cos t)^2 \,\mathrm{d}t$$

$$V_y = \cdots$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \cdot a^2 (1 - \cos t)^2 \, \mathrm{d}\, t$$

$$= 8\pi\, a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin^4 \frac{t}{2} \mathrm{d}\, t$$

令 $u = \dfrac{t}{2}$ ↓

$$= 16\pi\, a^3 \int_0^{\pi} (2u - \sin 2u) \sin^4 u \, \mathrm{d}\, u$$

令 $v = u - \dfrac{\pi}{2}$ ↓

$$= 16\pi\, a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\underline{2v} + \underline{\pi} + \underline{\sin 2v}) \underline{\cos^4 v} \, \mathrm{d}\, v = 6\pi^3 a^3$$

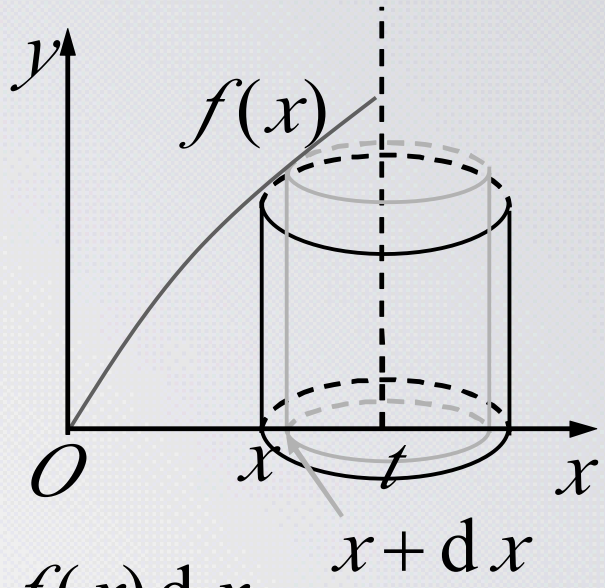
偶函数

奇函数

目录 上页 下页 返回 结束

例15. 设$y=f(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 时为连续的非负函数，且 $f(0)=0$, $V(t)$ 表示 $y=f(x)$, $x=t\,(>0)$ 及 x 轴所围图形绕直线 $x=t$ 旋转一周所成旋转体体积 , 证明:

$$V''(t)=2\pi\ f(t).$$



证： 利用柱壳法

$$\mathrm{d}V=2\pi\,(t-x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

则 $$V(t)=\int_0^t 2\,\pi\,(t-x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi t\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x-2\pi\int_0^t x\,f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$V'(t)=2\,\pi\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x+2\pi t f(t)-2\pi t f(t)$$

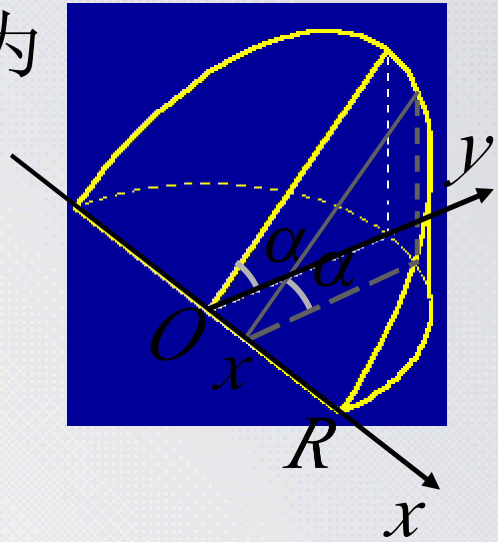
故 $$V''(t)=2\,\pi\,f(t)$$

例**16.** 一平面经过半径为R的圆柱体的底圆中心，并与底面交成 α 角，计算该平面截圆柱体所得立体的体积 .

解: 如图所示取坐标系, 则圆的方程为

$$x^2 + y^2 = R^2$$

垂直于x轴 的截面是直角三角形, 其面积为



$$A(x) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha \quad (-R \le x \le R)$$

利用对称性

$$V = 2\int_0^R \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha \, \mathrm{d}x$$

$$= 2\tan\alpha\left[R^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^R = \frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$

思考: 可否选择 y 作积分变量？

此时截面面积函数是什么？

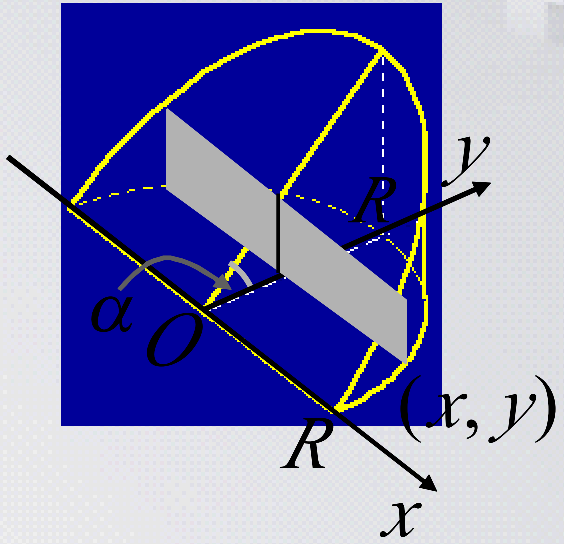
如何用定积分表示体积？

提示:

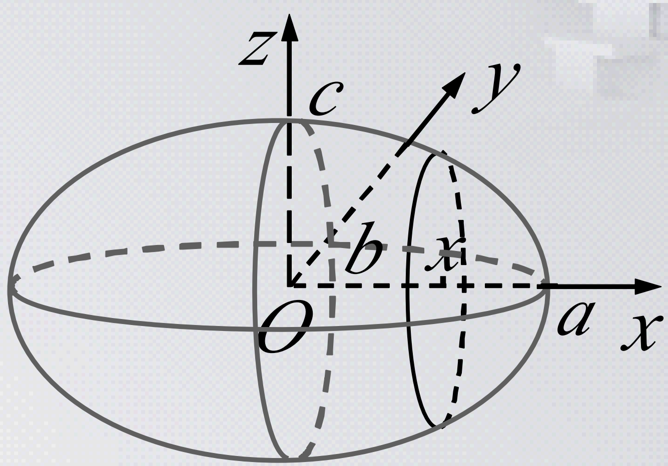
$$A(y) = 2x \cdot y\tan\alpha$$

$$= 2\tan\alpha \cdot y\sqrt{R^2 - y^2}$$

$$V = 2\tan\alpha \cdot \int_0^R y\sqrt{R^2 - y^2}\,\mathrm{d}y$$



例17. 计算由曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围立体(椭球体)的体积.



解: 垂直 x 轴的截面是椭圆

$$\frac{y^2}{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}+\frac{z^2}{c^2(1-\frac{x^2}{a^2})}=1$$

它的面积为 $A(x)=\pi bc(1-\frac{x^2}{a^2})\quad(-a\le x\le a)$

因此椭球体体积为

$$V=2\int_0^a \pi bc(1-\frac{x^2}{a^2})\,\mathrm{d}x=2\pi bc\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi abc$$

特别当 $a=b=c$ 时就是球体体积 .