

第七章

微分方程

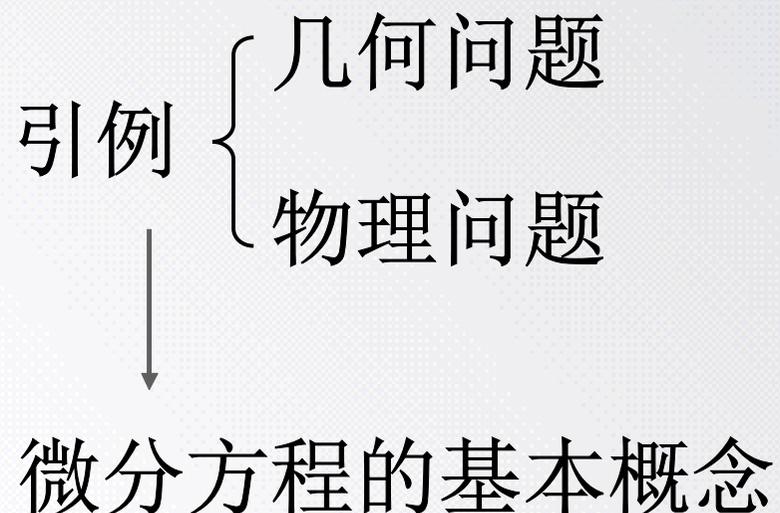
已知 $y' = f(x)$, 求 y — 积分问题

↓ 推广

已知含 y 及其若干阶导数的方程, 求 y
— 微分方程问题

第一节

微分方程的基本概念



引例1. 一曲线通过点(1,2),在该曲线上任意点处的切线斜率为 $2x$, 求该曲线的方程.

解: 设所求曲线方程为 $y = y(x)$, 则有如下关系式:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x & \text{①} \\ y|_{x=1} = 2 & \text{②} \end{cases}$$

由 ① 得 $y = \int 2x dx = x^2 + C$ (C 为任意常数)

由 ② 得 $C = 1$, 因此所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$.

引例2. 列车在平直路上以 20 m/s 的速度行驶, 制动时获得加速度 $a = -0.4 \text{ m/s}^2$, 求制动后列车的运动规律.

解: 设列车在制动后 t 秒行驶了 s 米, 即求 $s = s(t)$.

$$\text{已知} \quad \begin{cases} \frac{d^2 s}{dt^2} = -0.4 \\ s|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = 20 \end{cases}$$

由前一式两次积分, 可得 $s = -0.2 t^2 + C_1 t + C_2$

利用后两式可得 $C_1 = 20, C_2 = 0$

因此所求运动规律为 $s = -0.2 t^2 + 20 t$

说明: 利用这一规律可求出制动后多少时间列车才能停住, 以及制动后行驶了多少路程.

微分方程的基本概念

含未知函数及其导数的方程叫做微分方程。

分类 { 常微分方程 (本章内容)
偏微分方程

方程中所含未知函数导数的最高阶数叫做微分方程的阶。

一般地， n 阶常微分方程的形式是

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

或 $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ (n 阶显式微分方程)

微分方程的解 — 使方程成为恒等式的函数.

通解 — 解中所含独立的任意常数的个数与方程的阶数相同.
特解 — 不含任意常数的解, 其图形称为积分曲线.

定解条件 — 确定通解中任意常数的条件.

n 阶方程的初始条件(或初值条件):

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

引例1 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x \\ y|_{x=1} = 2 \end{cases}$ 引例2 $\begin{cases} \frac{d^2s}{dt^2} = -0.4 \\ s|_{t=0} = 0, \quad \frac{ds}{dt}|_{t=0} = 20 \end{cases}$

通解: $y = x^2 + C$

$$s = -0.2t^2 + C_1t + C_2$$

特解: $y = x^2 + 1$

$$s = -0.2t^2 + 20t$$

例1. 验证函数 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ (C_1, C_2 为常数) 是微分方程 $\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$ 的通解, 并求满足初始条件

$x|_{t=0} = A, \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$ 的特解.

$$\begin{aligned} \text{解: } \frac{d^2 x}{dt^2} &= -C_1 k^2 \cos kt - C_2 k^2 \sin kt \\ &= -k^2 (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) = -k^2 x \end{aligned}$$

这说明 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是方程的解.

C_1, C_2 是两个独立的任意常数, 故它是方程的通解.

利用初始条件易得: $C_1 = A, C_2 = 0$, 故所求特解为

$$x = A \cos kt$$

例2. 已知曲线上点 $P(x, y)$ 处的法线与 x 轴交点为 Q 且线段 PQ 被 y 轴平分, 求所满足的微分方程.

解: 如图所示, 点 $P(x, y)$ 处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$$

令 $Y = 0$, 得 Q 点的横坐标

$$X = x + yy'$$

$$\therefore x + yy' = -x, \text{ 即 } yy' + 2x = 0$$

