第四节
一阶线性微分方程

一、一阶线性微分方程

*二、伯努利方程

一、一阶线性微分方程

一阶线性微分方程标准形式: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

若 $Q(x)\equiv 0$, 称为齐次方程 ;

若 $Q(x)\not\equiv 0$, 称为非齐次方程 .

1. 解齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$

分离变量 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln|C|$

故通解为 $y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

2. 解非齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

用常数变易法: 作变换 $y(x)=u(x)\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$, 则

$$u'\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\cancel{-P(x)\,u\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}}\cancel{+P(x)\,u\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}}=Q(x)$$

即 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=Q(x)\,\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

两端积分得 $$u=\int Q(x)\,\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C$$

故原方程的通解 $$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\,\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

即 $$y=\underbrace{C\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}}+\underbrace{\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\int Q(x)\,\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解}}$$

例1. 解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{5/2}$.

解: 先解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2y}{x+1}=0$, 即 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{2\mathrm{d}x}{x+1}$

积分得 $\ln|y|=2\ln|x+1|+\ln|C|$, 即 $y=C(x+1)^2$

用常数变易法求特解. 令 $y=u(x)\cdot(x+1)^2$, 则

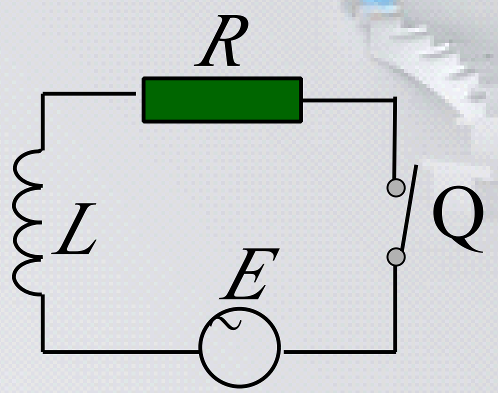
$$y'=u'\cdot(x+1)^2+2u\cdot(x+1)$$

代入非齐次方程得 $u'=(x+1)^{1/2}$

解得 $u=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C$

故原方程通解为 $y=(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C\right]$

例2. 有一电路如图所示, 其中电源电动势为 $E = E_m \sin \omega t$, 电阻 R 和电感 L 都是常量, 求电流 $i(t)$.



解: 列方程 . 由回路电压定律:

在闭合回路中, 所有支路上的电压降为 0

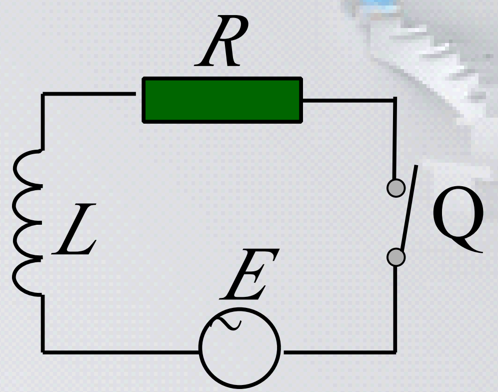
已知经过电阻 R 的电压降为 $R\,i$

经过 L 的电压降为 $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

因此有 $E - L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - Ri = 0$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E_m \sin \omega t}{L}$

初始条件: $i\big|_{t=0} = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} + \dfrac{R}{L}\,i = \dfrac{E_m \sin\omega\,t}{L} \\ i\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$



解方程:

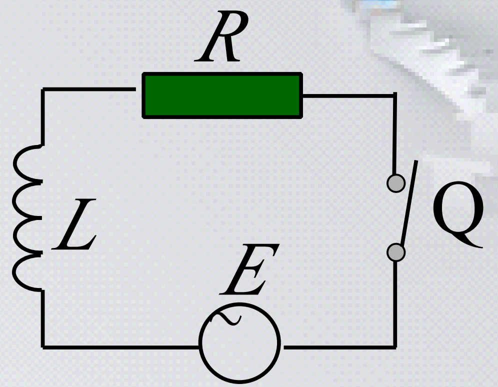
利用一阶线性方程解的公式可得

$$i(t) = \mathrm{e}^{-\int \frac{R}{L}\mathrm{d}\,t}\left[\int \frac{E_m}{L}\sin\omega\,t\cdot \mathrm{e}^{\int \frac{R}{L}\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\,t + C\right]$$

$$= \frac{E_m}{R^2+\omega^2 L^2}(R\sin\omega\,t - \omega\,L\cos\omega\,t) + C\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

由初始条件: $i\big|_{t=0} = 0$ 得 $C = \dfrac{\omega\,L E_m}{R^2+\omega^2 L^2}$

因此所求电流函数为



$$i(t)=\frac{\omega LE_m}{R^2+\omega^2L^2}e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_m}{R^2+\omega^2L^2}(\underline{R}\sin\omega t-\underline{\omega L}\cos\omega t)$$

解的意义：令 $\varphi=\arctan\dfrac{\omega L}{R}$，则

$$i(t)=\underbrace{\frac{\omega LE_m}{R^2+\omega^2L^2}e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{暂态电流}}+\underbrace{\frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\varphi)}_{\text{稳态电流}}$$

例3. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{xy}}+\left[\dfrac{2}{y}-\sqrt{\dfrac{x}{y^3}}\right]\mathrm{d}y=0$ 的通解 .

解: 注意 x, y 同号，不妨设 $x, y>0$, 此时 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\mathrm{d}\sqrt{x}$,

故方程可变形为 $2\dfrac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\mathrm{d}y}-\dfrac{\sqrt{x}}{y}=-\dfrac{2}{\sqrt{y}}$

这是以 $\sqrt{x}$ 为因变量 y 为自变量的一阶线性方程

由一阶线性方程通解公式 , 得

$$\sqrt{x}=\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}y}{2y}}\left[\int\left(-\frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}y}{2y}}\right)\mathrm{d}y+\ln C\right]\qquad (C>0)$$

$$=\sqrt{y}\left[-\int\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y+\ln C\right]=\sqrt{y}\ln\frac{C}{y}$$

所求通解为 $y\mathrm{e}^{\sqrt{x/y}}=C\ \ (C>0)$

*二、伯努利 (Bernoulli)方程

伯努利方程的标准形式:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^{n}\quad(n\neq 0,1)$$

解法: 以 y^{n} 除方程两边，得

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

令 $z=y^{1-n}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$ (线性方程)

求出此方程通解后, 换回原变量即得伯努利方程的通解.

例**4.** 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解.

解: 令 $z=y^{-1}$, 则方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{z}{x}=-a\ln x$$

其通解为 $$z=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(-a\ln x)e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]$$

将 $z=y^{-1}$代入, 得原方程通解:

$$yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$$