第五节 可降阶高阶微分方程

一、$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

二、$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

三、$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

一、$y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程

令 $z=y^{(n-1)}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y^{(n)}=f(x)$, 因此

$$z=\int f(x)\,\mathrm{d}x+C_1$$

即

$$y^{(n-1)}=\int f(x)\,\mathrm{d}x+C_1$$

同理可得

$$y^{(n-2)}=\int\Big[\int f(x)\,\mathrm{d}x+C_1\Big]\mathrm{d}x+C_2$$

$$=\int\Big[\int f(x)\,\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}x+C_1x+C_2$$

依次通过 n 次积分, 可得含 n 个任意常数的通解 .

例1. 求解 $y''' = \mathrm{e}^{2x} - \cos x.$

解: $y'' = \int\left(\mathrm{e}^{2x} - \cos x\right)\mathrm{d}x + C_1'$

$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \sin x + C_1'$

$y' = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + \cos x + C_1'x + C_2$

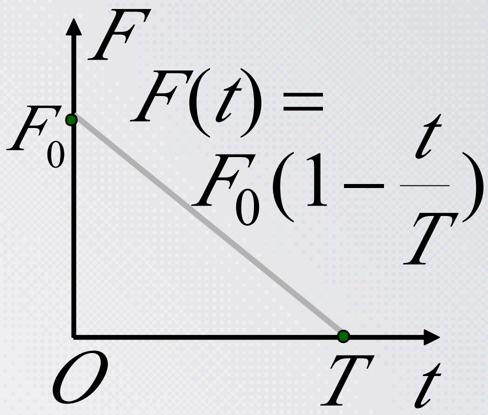
$y = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x} + \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3$

(此处 $C_1 = \frac{1}{2}C_1'$)

例2. 质量为 m 的质点受力 F 的作用沿 Ox 轴作直线
运动，设力 F 仅是时间 t 的函数: $F = F(t)$. 在开始时刻
$t = 0$ 时 $F(0) = F_0$, 随着时间的增大 , 此力 F 均匀地减
小，直到 $t = T$ 时 $F(T) = 0$. 如果开始时质点在原点，且
初速度为0，求质点的运动规律.

解: 据题意有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\, t^2} = \dfrac{F_0}{m}\left(1 - \dfrac{t}{T}\right) \\ x\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$



对方程两边积分，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{F_0}{m}(t-\frac{t^2}{2T})+C_1$$

利用初始条件 $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0$ 得 $C_1=0$, 于是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{F_0}{m}(t-\frac{t^2}{2T})$$

两边再积分得 $x=\frac{F_0}{m}(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6T})+C_2$

再利用 $x|_{t=0}=0$ 得 $C_2=0$, 故所求质点运动规律为

$$x=\frac{F_0}{2m}(t^2-\frac{t^3}{3T})$$

二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

设 $y' = p(x)$, 则 $y'' = p'$, 原方程化为一阶方程

$$p' = f(x, p)$$

设其通解为 $\quad p = \varphi(x, C_1)$

则得 $\quad y' = \varphi(x, C_1)$

再一次积分, 得原方程的通解

$$y = \int \varphi(x, C_1)\,\mathrm{d}x + C_2$$

例**3.** 求解 $\begin{cases}(1+x^2)y''=2xy' \\ y\big|_{x=0}=1, \quad y'\big|_{x=0}=3\end{cases}$

解：设 $y'=p(x)$, 则 $y''=p'$, 代入方程得

$$(1+x^2)p'=2xp \xrightarrow{\text{分离变量}} \frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2x\mathrm{d}x}{(1+x^2)}$$

积分得 $\ln|p|=\ln(1+x^2)+\ln|C_1|$, 即 $p=C_1(1+x^2)$

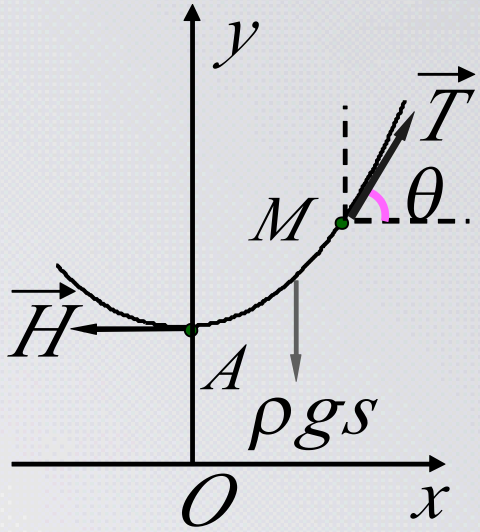
利用 $y'\big|_{x=0}=3$, 得 $C_1=3$, 于是有 $y'=3(1+x^2)$

两端再积分得 $\quad y=x^3+3x+C_2$

利用 $y\big|_{x=0}=1$, 得 $C_2=1$, 因此所求特解为

$$y=x^3+3x+1$$

例4. 设有一均匀, 柔软的绳索, 两端固定, 绳索仅受重力作用而下垂, 问该绳索的平衡状态是怎样的曲线？



解: 取坐标系如图. 考察最低点 A 到任意点$M(x, y)$ 弧段的受力情况:

A 点受水平张力 $\vec{H}$

M 点受切向张力$\vec{T}$

弧段重力大小 $\rho g s$ (ρ: 密度, s:弧长)

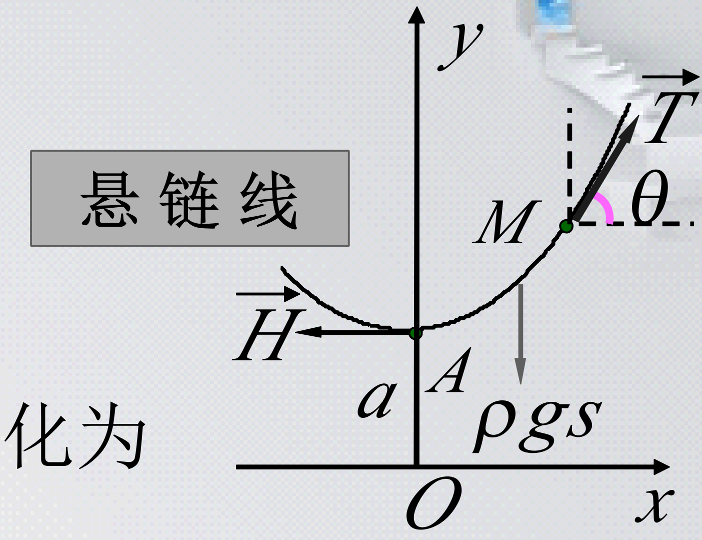
按静力平衡条件, 有 $T\cos\theta = H,\ T\sin\theta = \rho g s$

两式相除得 $\tan\theta = \frac{1}{a}s$ (其中$a = \frac{H}{\rho g}$)

故有 $y' = \frac{1}{a}\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \longrightarrow y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}$

设 $|OA|=a$, 则得定解问题:

$$\begin{cases} y''=\frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2} \\ y\big|_{x=0}=a, \quad y'\big|_{x=0}=0 \end{cases}$$



令 $y'=p(x)$, 则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, 原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{a}\mathrm{d}x$$

$\boxed{\mathrm{Arsh}\,p=\ln(p+\sqrt{1+p^2})}$

两端积分得 $\mathrm{Arsh}\,p=\frac{x}{a}+C_1$, 由 $y'\big|_{x=0}=0$ 得 $C_1=0$,

则有 $$y'=\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}$$

两端积分得 $y=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}+C_2$, 由 $y\big|_{x=0}=a$, 得 $C_2=0$

故所求绳索的形状为 $y=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}=\frac{a}{2}(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}})$

三、$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

故方程化为 $p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$

设其通解为 $p = \varphi(y, C_1)$, 即得

$$y' = \varphi(y, C_1)$$

分离变量后积分, 得原方程的通解

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$

例5. 求解 $yy'' - y'^2 = 0$.

解: 设 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

代入方程得 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 = 0$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p} = \dfrac{\mathrm{d}y}{y}$

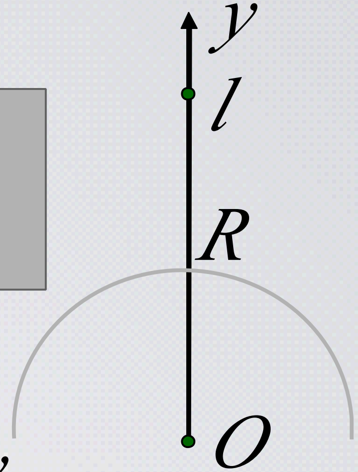
两端积分得 $\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|$, 即 $p = C_1 y$,

$\therefore \quad y' = C_1 y$ (一阶线性齐次方程)

故所求通解为 $y = C_2 \mathrm{e}^{C_1 x}$

例6. 一个离地面很高的物体, 受地球引力的作用由静止开始落向地面, 求它落到地面时的速度和所需时间(不计空气阻力).

解: 如图所示选取坐标系. 则有定解问题:



$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{kmM}{y^2} \\ y\big|_{t=0} = l,\quad y'\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

M: 地球质量
m: 物体质量

设 $v(y) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$

代入方程得 $v\,\mathrm{d}v = -\dfrac{kM}{y^2}\mathrm{d}y$, 积分得 $v^2 = \dfrac{2kM}{y} + C_1$

利用 $v\big|_{t=0} = y'\big|_{t=0} = 0,\ y\big|_{t=0} = l$, 得 $C_1 = -\dfrac{2kM}{l}$

$$v^2 = 2kM\left[\frac{1}{y} - \frac{1}{l}\right],\ \text{即}\ v = -\sqrt{\frac{2kM}{l}}\sqrt{\frac{l-y}{y}}$$

$$\because\ v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad \therefore\ \mathrm{d}t = -\sqrt{\frac{l}{2kM}}\sqrt{\frac{y}{l-y}}\,\mathrm{d}y$$

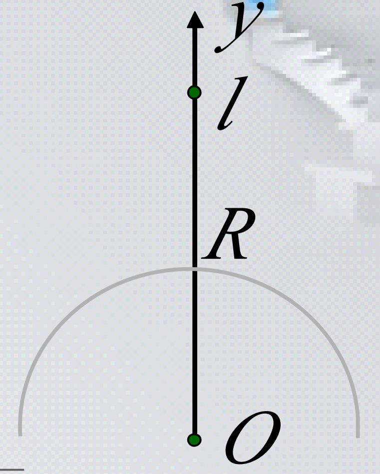
两端积分得 $t = \sqrt{\dfrac{l}{2kM}}\left[\sqrt{ly-y^2} + l\arccos\sqrt{\dfrac{y}{l}}\right] + C_2$

利用 $y\big|_{t=0} = l$, 得 $C_2 = 0$, 因此有

$$t = \sqrt{\frac{l}{2kM}}\left[\sqrt{ly-y^2} + l\arccos\sqrt{\frac{y}{l}}\right]$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{kmM}{y^2},\quad v=-\sqrt{\frac{2kM}{l}}\sqrt{\frac{l-y}{y}}$$

$$t=\sqrt{\frac{l}{2kM}}\left[\sqrt{ly-y^2}+l\arccos\sqrt{\frac{y}{l}}\right]$$



由于 $y=R$ 时 $y''=-g$, 由原方程可得 $k=\dfrac{gR^2}{M}$

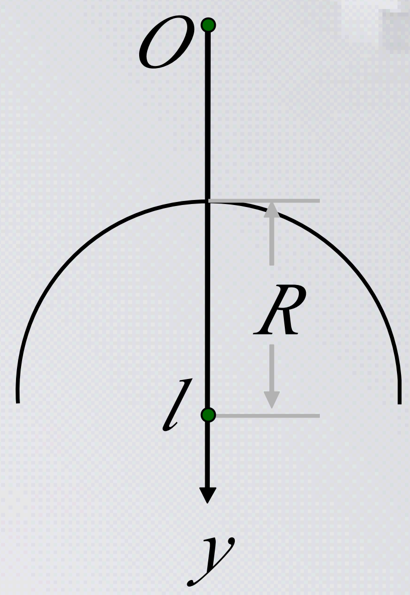
因此落到地面($y=R$)时的速度和所需时间分别为

$$v\big|_{y=R}=-\sqrt{\frac{2gR(l-R)}{l}}$$

$$t\big|_{y=R}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\left[\sqrt{lR-R^2}+l\arccos\sqrt{\frac{R}{l}}\right]$$

说明：若此例改为如图所示的坐标系，则定解问题为

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{kmM}{(l-y)^2} \\ y\big|_{t=0} = 0,\ y'\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$



令 $v = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，解方程可得

$$v^2 = 2kM\left(\frac{1}{l-y} - \frac{1}{l}\right)$$

问：此时开方根号前应取什么符号？说明道理 .

例7. 解初值问题 $\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 1 \end{cases}$

解: 令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, 代入方程得

$$p\,dp = e^{2y}\,dy$$

积分得 $\quad \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}e^{2y} + C_1$

利用初始条件, 得 $C_1 = 0$, 根据 $p\big|_{y=0} = y'\big|_{x=0} = 1 > 0$, 得

$$\frac{\mathbf{d}y}{dx} = p = e^{y}$$

积分得 $-e^{-y} = x + C_2$, 再由 $y\big|_{x=0} = 0$, 得 $C_2 = -1$

故所求特解为 $\quad 1 - e^{-y} = x$

例8. 设函数 $y(x)\ (x \ge 0)$ 二阶可导, 且 $y'(x) > 0$, $y(0) = 1$, 过曲线 $y = y(x)$ 上任一点 $P(x, y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线, 上述两直线与 x 轴围成的三角形面积记为 S_1, 区间 $[0, x]$ 上以 $y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2, 且 $2S_1 - S_2 \equiv 1$, 求 $y = y(x)$ 满足的方程 .

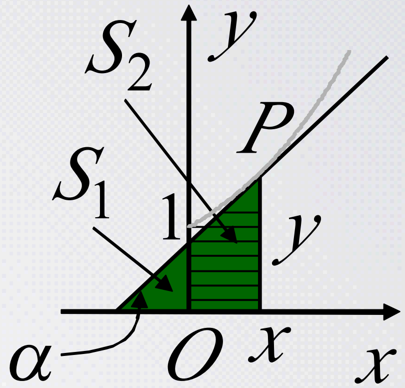
(1999 考研)

解: 因为 $y(0) = 1$, $y'(x) > 0$, 所以 $y(x) > 0$.

设曲线 $y = y(x)$ 在点 $P(x, y)$ 处的切线倾角为 α, 于是

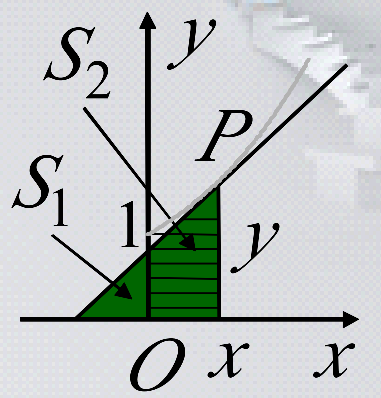
$$S_1 = \frac{1}{2} y^2 \cot\alpha = \frac{y^2}{2y'}$$

$$S_2 = \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$$



目录 上页 下页 返回 结束

利用 $2S_1 - S_2 = 1$, 得 $\dfrac{y^2}{y'} - \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}\,t = 1$



两边对 x 求导, 得 $yy'' = (y')^2$

定解条件为 $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

$$S_1 = \frac{y^2}{2y'}$$

$$S_2 = \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}\,t$$

令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 方程化为

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^2 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

解得 $p = C_1 y$, 利用定解条件得 $C_1 = 1$, 再解 $y' = y$, 得 $y = C_2\,\mathrm{e}^x$, 再利用 $y(0) = 1$ 得 $C_2 = 1$, 故所求曲线方程为

$$y = \mathrm{e}^x$$