

第七节

常系数齐次线性微分方程

基本思路:

求解常系数线性齐次微分方程

↓ 转化

求特征方程(代数方程)之根

二阶常系数齐次线性微分方程:

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (p, q \text{ 为常数}) \quad ①$$

因为 r 为常数时, 函数 e^{rx} 和它的导数只差常数因子, 所以令①的解为 $y = e^{rx}$ (r 为待定常数), 代入①得

$$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$$
$$\longrightarrow r^2 + pr + q = 0 \quad ②$$

称②为微分方程①的特征方程, 其根称为特征根.

1. 当 $p^2 - 4q > 0$ 时, ②有两个相异实根 r_1, r_2 , 则微分方程有两个线性无关的特解: $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$,

因此方程的通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

2. 当 $p^2 - 4q = 0$ 时, 特征方程有两个相等实根 $r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$, 则微分方程有一个特解 $y_1 = e^{r_1 x}$.

设另一特解 $y_2 = y_1 u(x) = e^{r_1 x} u(x)$ ($u(x)$ 待定)

代入方程得:

$$e^{r_1 x} [(u'' + 2r_1 u' + r_1^2 u) + p(u' + r_1 u) + qu] = 0$$

$$u'' + (2r_1 + p)u' + (r_1^2 + pr_1 + q)u = 0$$

↓ 注意 r_1 是特征方程的重根

$$u'' = 0$$

取 $u = x$, 则得 $y_2 = xe^{r_1 x}$, 因此原方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$$

3. 当 $p^2 - 4q < 0$ 时, 特征方程有一对共轭复根

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

这时原方程有两个复数解:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

利用解的叠加原理, 得原方程的线性无关特解:

$$\overline{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$\overline{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

因此原方程的通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$



小结:

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (p, q \text{ 为常数})$$

特征方程: $r^2 + pr + q = 0$, 特征根: r_1, r_2

| 特征根 | 通解 |
|-------------------------------|--|
| $r_1 \neq r_2$ 实根 | $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ |
| $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$ | $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$ |
| $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ | $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ |

以上结论可推广到高阶常系数线性微分方程。

推广:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (a_k \text{ 均为常数})$$

$$\text{特征方程: } r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

若特征方程含 k 重实根 r , 则其通解中必含对应项

$$(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) e^{rx}$$

若特征方程含 k 重复根 $r = \alpha \pm i\beta$, 则其通解中必含
对应项

$$e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + \\ + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$$

(以上 C_i, D_i 均为任意常数)

例1. 求方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解.

解: 特征方程 $r^2 - 2r - 3 = 0$, 特征根: $r_1 = -1, r_2 = 3$,
因此原方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

例2. 求解初值问题
$$\begin{cases} \frac{d^2 s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + s = 0 \\ \underline{s|_{t=0} = 4, \quad \underline{\frac{ds}{dt}|_{t=0} = -2}} \end{cases}$$

解: 特征方程 $r^2 + 2r + 1 = 0$ 有重根 $r_1 = r_2 = -1$,

因此原方程的通解为 $s = (C_1 + C_2 t)e^{-t}$

利用初始条件得 $C_1 = 4, C_2 = 2$

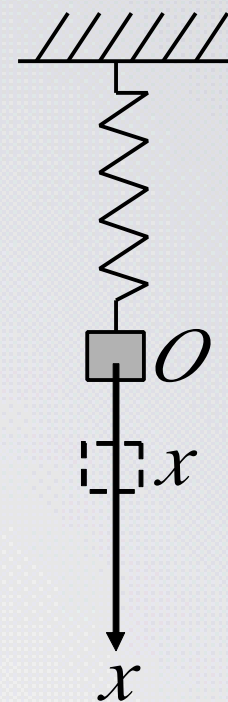
于是所求初值问题的解为 $s = (4 + 2t)e^{-t}$



例3. 质量为 m 的物体自由悬挂在一端固定的弹簧上, 在无外力作用下做自由运动, 取其平衡位置为原点建立坐标系如图, 设 $t=0$ 时物体的位置为 $x=x_0$, 初始速度为 v_0 , 求物体的运动规律 $x=x(t)$.

解: 由第六节例1 (P323) 知, 位移满足因此定解问题为

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0 \\ x|_{t=0} = x_0, \quad \frac{dx}{dt}|_{t=0} = v_0 \end{cases}$$



1) 无阻尼自由振动情况 ($n = 0$)

方程: $\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$

特征方程: $r^2 + k^2 = 0$, 特征根: $r_{1,2} = \pm i k$

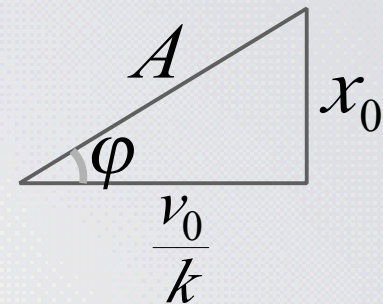
方程通解: $x = C_1 \cos k t + C_2 \sin k t$

利用初始条件得: $C_1 = x_0$, $C_2 = \frac{v_0}{k}$

故所求特解:

$$x = x_0 \cos k t + \frac{v_0}{k} \sin k t$$
$$= A \sin(k t + \varphi)$$

$$\left(A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \tan \varphi = \frac{k x_0}{v_0} \right)$$



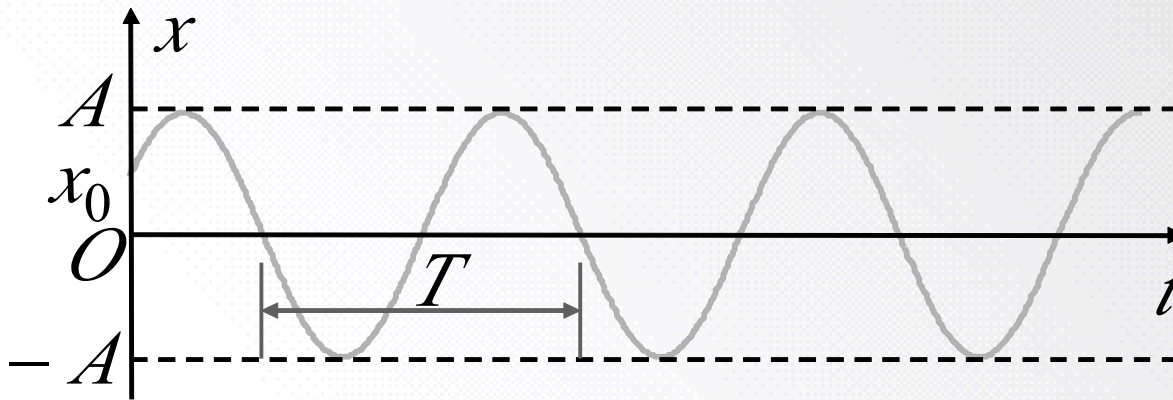
解的特征:

$$x = A \sin(kt + \varphi) \quad \text{简谐振动}$$

$$A: \text{振幅}, \quad \varphi: \text{初相}, \quad \text{周期}: T = \frac{2\pi}{k}$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}: \text{固有频率 (仅由系统特性确定)}$$

(下图中假设 $x|_{t=0} = x_0 > 0$, $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = v_0 > 0$)



2) 有阻尼自由振动情况

$$\text{方程: } \frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0$$

$$\text{特征方程: } r^2 + 2nr + k^2 = 0$$

$$\text{特征根: } r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$$

这时需分如下三种情况进行讨论:

$$\text{小阻尼: } n < k \longrightarrow x = e^{-nt} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$$

$$(\omega = \sqrt{k^2 - n^2})$$

解的特征

$$\text{大阻尼: } n > k \longrightarrow x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

解的特征

$$\text{临界阻尼: } n = k \longrightarrow x = (C_1 + C_2 t) e^{-nt}$$

解的特征

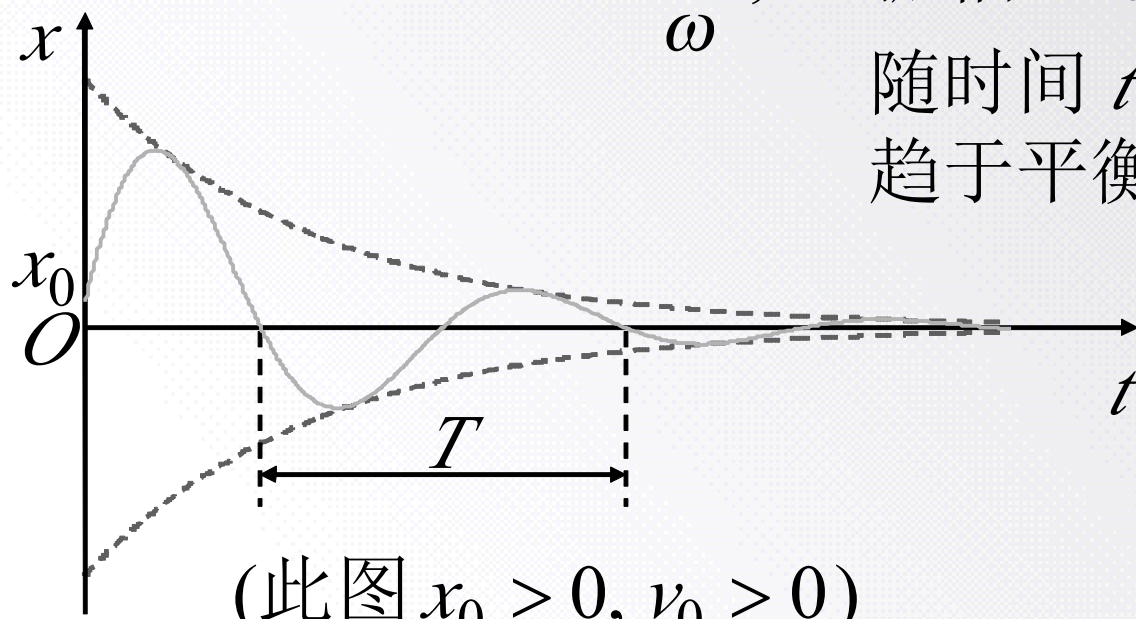
小阻尼自由振动解的特征：

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \quad (\omega = \sqrt{k^2 - n^2})$$

↓ 由初始条件确定任意常数后变形

$$x = Ae^{-nt} \sin(\omega t + \varphi)$$

运动周期: $T = \frac{2\pi}{\omega}$; 振幅: Ae^{-nt} 衰减很快,
随时间 t 的增大物体
趋于平衡位置.



(此图 $x_0 > 0, v_0 > 0$)

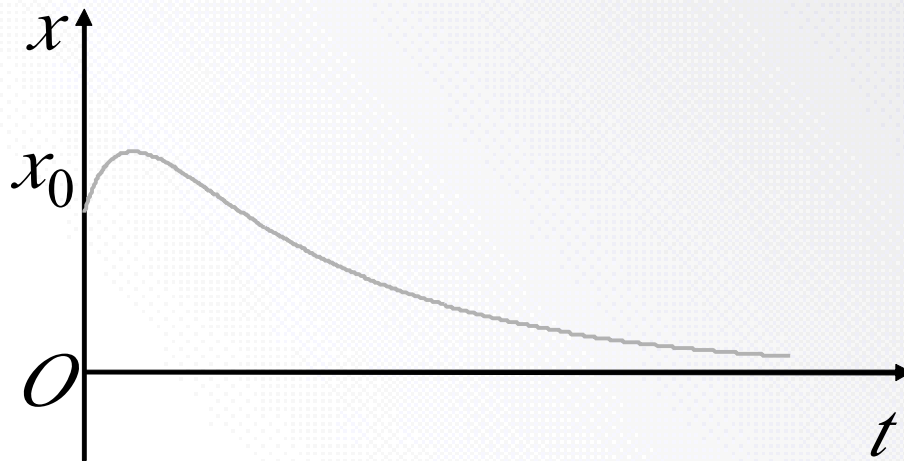
大阻尼解的特征: ($n > k$)

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

其中 $r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -(n \mp \sqrt{n^2 - k^2}) < 0$

- 1) 无振荡现象;
- 2) 对任何初始条件 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

即随时间 t 的增大物体总趋于平衡位置.



此图参数:

$$n = 1.5, \quad k = 1$$

$$x_0 = 1.5$$

$$\nu_0 = 5.073$$

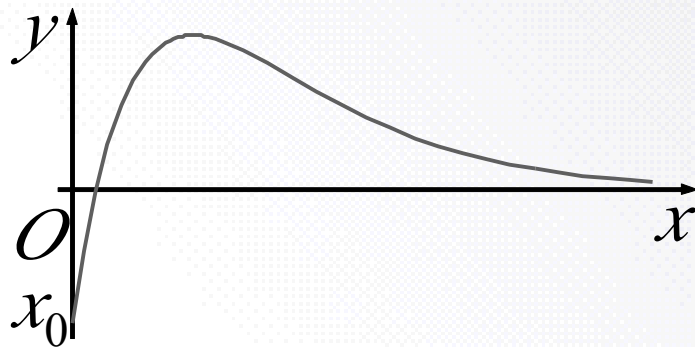
临界阻尼解的特征：($n = k$)

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-nt}$$

任意常数由初始条件定, 无论 C_1, C_2 取何值都有:

- 1) $x(t)$ 最多只与 t 轴交于一点;
- 2) 无振荡现象;
- 3) $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (C_1 + C_2 t) e^{-nt} = 0$.

即随时间 t 的增大物体总趋于平衡位置.



此图参数: $n = 2$

$$x_0 = -0.1$$

$$v_0 = 1$$



例4. 求方程 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$ 的通解.

解: 特征方程 $r^4 - 2r^3 + 5r^2 = 0$, 特征根:

$$r_1 = r_2 = 0, \quad r_{3,4} = 1 \pm 2i$$

因此原方程通解为

$$y = C_1 + C_2x + e^x(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$$

例5. 解方程 $y^{(5)} - y^{(4)} = 0$.

解: 特征方程: $r^5 - r^4 = 0$, 特征根:

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0, \quad r_5 = 1$$

原方程通解: $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5e^x$

(不难看出, 原方程有特解 $1, x, x^2, x^3, e^x$)



例6. 解方程 $\frac{d^4 w}{dx^4} + \beta^4 w = 0 \quad (\beta > 0)$.

解: 特征方程: $r^4 + \beta^4 = (r^2 + \beta^2)^2 - 2\beta^2 r^2 = 0$

即 $(r^2 + \sqrt{2}\beta r + \beta^2)(r^2 - \sqrt{2}\beta r + \beta^2) = 0$

其根为 $r_{1,2} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$, $r_{3,4} = -\frac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

方程通解:

$$w = e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}x} \left(C_1 \cos \frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_2 \sin \frac{\beta}{\sqrt{2}}x \right) \\ + e^{-\frac{\beta}{\sqrt{2}}x} \left(C_3 \cos \frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_4 \sin \frac{\beta}{\sqrt{2}}x \right)$$

例7. 解方程 $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

解: 特征方程: $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$

$$\text{即 } (r^2 + 1)^2 = 0$$

特征根为 $r_{1,2} = \pm i, \quad r_{3,4} = \pm i$

则方程通解:

$$y = (C_1 + C_3 x) \cos x + (C_2 + C_4 x) \sin x$$

