*第九节

第七章

欧拉方程

欧拉方程

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

(p_k为常数)

令 $x = \mathrm{e}^t$, 即 $t = \ln x$

↓

常系数线性微分方程

欧拉方程的算子解法:

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

令 $x = \mathrm{e}^t$, 则 $t = \ln x$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow xy' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\Longrightarrow x^2 y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

…… 计算繁!

记 $\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, $\mathrm{D}^k=\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}$ $(k=2,3,\cdots)$, 则由上述计算可知:

$$xy'=\mathrm{D}\,y$$

$$x^2y''=\mathrm{D}^2\,y-\mathrm{D}\,y=\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)y$$

用归纳法可证 $x^k y^{(k)}=\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)\cdots(\mathrm{D}-k+1)\,y$

于是欧拉方程

$$x^n y^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$$

转化为常系数线性方程:

$$\mathrm{D}^n\,y+b_1\,\mathrm{D}^{n-1}\,y+\cdots+b_ny=f(\mathrm{e}^t)$$

即 $$\frac{\mathrm{d}^n\,y}{\mathrm{d}\,t^n}+b_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}\,y}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}+\cdots+b_ny=f(\mathrm{e}^t)$$

例**1.** 求方程 $x^2y''-2xy'+2y=\ln^2 x-2\ln x$ 的通解.

解**:** 令 $x=\mathrm{e}^t$, 则 $t=\ln x$, 记 $\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}$, 则原方程化为

$$\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)y-2\mathrm{D}\,y+2y=t^2-2t$$

即

$$(\mathrm{D}^2-3\mathrm{D}+2)y=t^2-2t$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}-3\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}t}+2y=t^2-2t \quad ①$$

特征方程 $r^2-3r+2=0$, 其根 $r_1=1, r_2=2$,

则①对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{2t}$$

设特解: $y^* = At^2 + Bt + C$

代入①确定系数, 得

$$y^* = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$$

① 的通解为

$$y = C_1 \mathrm{e}^t + C_2 \mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$$

换回原变量, 得原方程通解为

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = t^2 - 2t \quad ①$$

例**2.** 求方程 $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$ 的通解.

解: 将方程化为 $x^2 y'' - x y' + y = 2x$ (欧拉方程)

令 $x = \mathrm{e}^t$, 记 $\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 则方程化为

$$[\mathrm{D}(\mathrm{D}-1) - \mathrm{D} + 1]\, y = 2\mathrm{e}^t$$

即

$$(\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} + 1)\, y = 2\mathrm{e}^t \qquad ②$$

特征根: $r_1 = r_2 = 1$,

设特解: $y = A t^2 \mathrm{e}^t$, 代入 ② 解得 $A = 1$, 所求通解为

$$y = (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^t + t^2 \mathrm{e}^t$$

$$= (C_1 + C_2 \ln x)\, x + x \ln^2 x$$

例3. 设函数 $y=y(x)$ 满足

$$xy+\int_1^x [3y+t^2 y''(t)]\,\mathrm{d}\,t = 5\ln x,\quad x\ge 1$$

且 $y'\big|_{x=1}=0$，求 $y(x)$.

解: 由题设得定解问题

$$\begin{cases} x^2 y''+xy'+4y=\dfrac{5}{x} & ③ \\ y(1)=0,\quad y'(1)=0 & ④ \end{cases}$$

令 $x=\mathrm{e}^t$，记 $\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则③化为

$$[\,\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)+\mathrm{D}+4\,]\,y=5\mathrm{e}^{-t}$$

$$(\mathrm{D}^2+4)\,y=5\mathrm{e}^{-t} \qquad ⑤$$

特征根: $r=\pm 2i$，设特解: $y^*=A\mathrm{e}^{-t}$，代入⑤得 $A=1$

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + 4y = \dfrac{5}{x} & ③ \\ y(1) = 0, \quad y'(1) = 0 & ④ \end{cases}$$

得通解为

$$y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \mathrm{e}^{-t}$$

$$= C_1 \cos(2\ln x) + C_2 \sin(2\ln x) + \frac{1}{x}$$

利用初始条件④得

$$C_1 = -1, \quad C_2 = \frac{1}{2}$$

故所求特解为

$$y = -\cos(2\ln x) + \frac{1}{2}\sin(2\ln x) + \frac{1}{x}$$

思考: 如何解下述微分方程

$$(x+a)^2 y'' + p_1(x+a)y' + p_2 y = f(x)$$

p_1, p_2 为常数

提示: 原方程

先令 $u = x + a$

$$u^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} u^2} + p_1 u \frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} u} + p_2 y = f(u-a)$$

令 $x = \mathrm{e}^t$, 记 $\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t}$

直接令

$x + a = \mathrm{e}^t$

记 $\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t}$

$$[\mathrm{D}(\mathrm{D}-1) + p_1 \mathrm{D} + p_2] y = f(\mathrm{e}^t - a)$$