

第八章

空间解析几何与向量代数

第一部分 向量代数

第二部分 空间解析几何

在三维空间中：

空间形式 — 点, 线, 面



数量关系 — 坐标, 方程 (组)

基本方法 — 坐标法; 向量法

第一节

向量及其线性运算

- 一、向量的概念
- 二、向量的线性运算
- 三、空间直角坐标系
- 四、利用坐标作向量的线性运算
- 五、向量的模、方向角、投影



一、向量的概念

向量: 既有大小, 又有方向的量称为向量 (又称矢量).

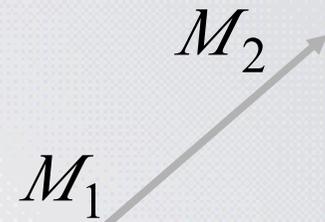
表示法: 有向线段 $\overrightarrow{M_1 M_2}$, 或 \vec{a} , 或 \mathbf{a} .

向量的模: 向量的大小, 记作 $|\overrightarrow{M_1 M_2}|$, 或 $|\vec{a}|$, 或 $|\mathbf{a}|$.

自由向量: 与起点无关的向量.

单位向量: 模为 1 的向量, 记作 \vec{e} 或 \mathbf{e} .

零向量: 模为 0 的向量, 记作 $\vec{0}$, 或 $\mathbf{0}$.



若向量 \vec{a} 与 \vec{b} 大小相等, 方向相同, 则称 \vec{a} 与 \vec{b} 相等, 记作 $\vec{a} = \vec{b}$;

若向量 \vec{a} 与 \vec{b} 方向相同或相反, 则称 \vec{a} 与 \vec{b} 平行, 记作 $\vec{a} \parallel \vec{b}$; 规定: 零向量与任何向量平行;

与 \vec{a} 的模相同, 但方向相反的向量称为 \vec{a} 的负向量, 记作 $-\vec{a}$;

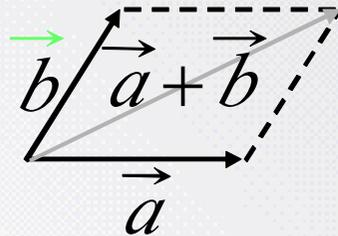
因平行向量可平移到同一直线上, 故两向量平行又称两向量共线.

若 $k (\geq 3)$ 个向量经平移可移到同一平面上, 则称此 k 个向量共面.

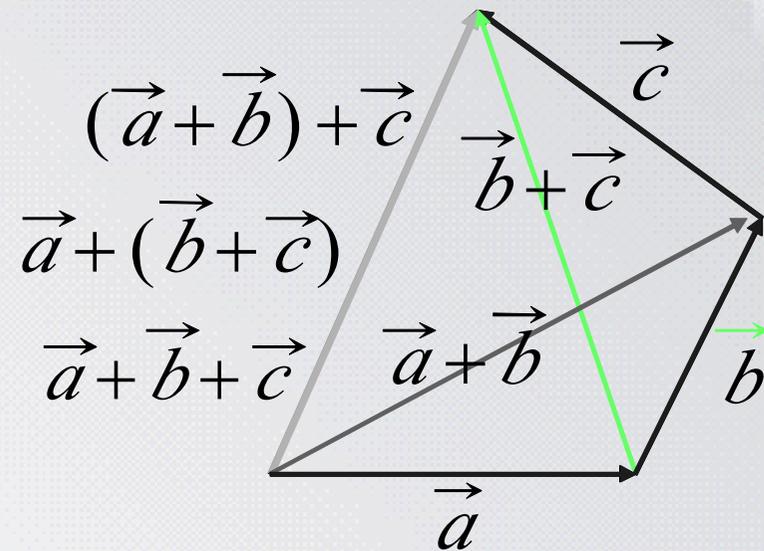
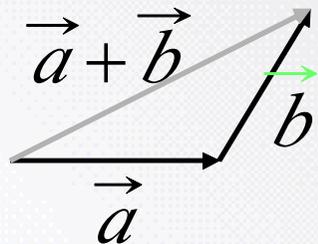
二、向量的线性运算

1. 向量的加法

平行四边形法则：
则：



三角形法则：

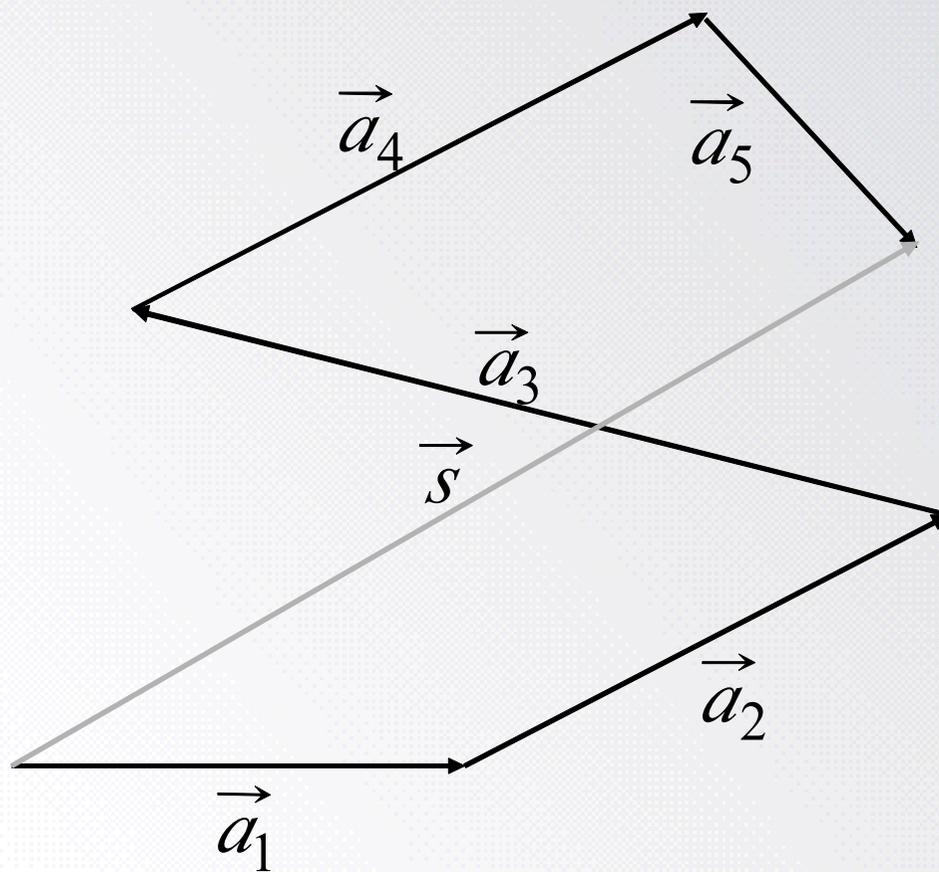


运算规律：交换律 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

结合律 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

三角形法则可推广到多个向量相加。

$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5$$



2. 向量的减法

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a})$$

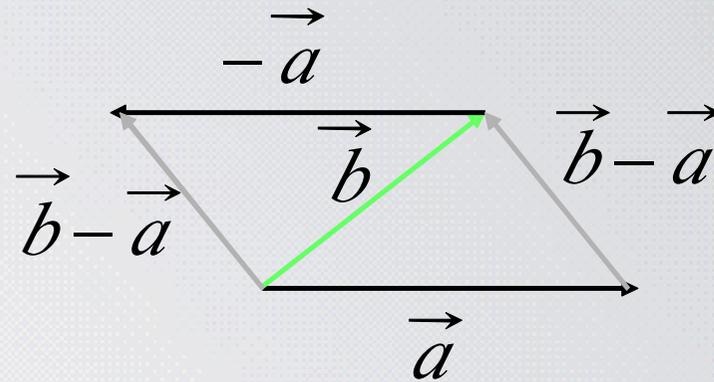
特别当 $\vec{b} = \vec{a}$ 时, 有

$$\vec{a} - \vec{a} = \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

三角不等式

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$



3. 向量与数的乘法

λ 是一个数, λ 与 \vec{a} 的乘积是一个新向量, 记作 $\lambda \vec{a}$.

规定: $\lambda > 0$ 时, $\lambda \vec{a}$ 与 \vec{a} 同向, $|\lambda \vec{a}| = \lambda |\vec{a}|$;

$\lambda < 0$ 时, $\lambda \vec{a}$ 与 \vec{a} 反向, $|\lambda \vec{a}| = -\lambda |\vec{a}|$;

$\lambda = 0$ 时, $\lambda \vec{a} = \vec{0}$.

总之: $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$

运算律: 结合律 $\lambda(\mu \vec{a}) = \mu(\lambda \vec{a}) = \lambda \mu \vec{a}$

分配律 $(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$

$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$

若 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 则有单位向量 $\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$. 因此 $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{e}_a$

定理1. 设 \vec{a} 为非零向量, 则

$$\vec{a} // \vec{b} \iff \vec{b} = \lambda \vec{a} \quad (\lambda \text{ 为唯一实数})$$

证: “ \longrightarrow ”. 设 $\vec{a} // \vec{b}$, 取 $\lambda = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, \vec{a}, \vec{b} 同向时取正号
反向时取负号, 则 \vec{b} 与 $\lambda \vec{a}$ 同向, 且

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

故 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

再证数 λ 的唯一性. 设又有 $\vec{b} = \mu \vec{a}$, 则 $(\lambda - \mu) \vec{a} = \vec{0}$
而 $|\vec{a}| \neq 0$, 故 $|\lambda - \mu| = 0$, 即 $\lambda = \mu$.

“ \longleftarrow ” 已知 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, 则

当 $\lambda = 0$ 时, $\vec{b} = \vec{0}$

当 $\lambda > 0$ 时, \vec{a}, \vec{b} 同向

当 $\lambda < 0$ 时, \vec{a}, \vec{b} 反向

$\longrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

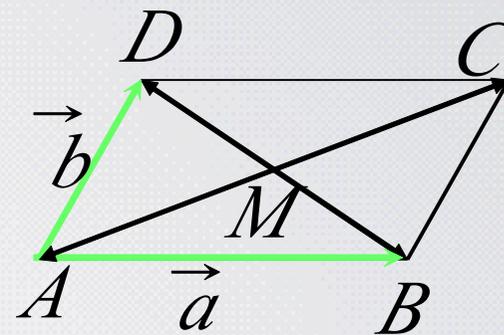
例1. 设 M 为 $\square ABCD$ 对角线的交点, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 试用 \vec{a} 与 \vec{b} 表示 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}$.

解: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MA}$

$$\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MD} = -2\overrightarrow{MB}$$

$$\therefore \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \quad \overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \quad \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$

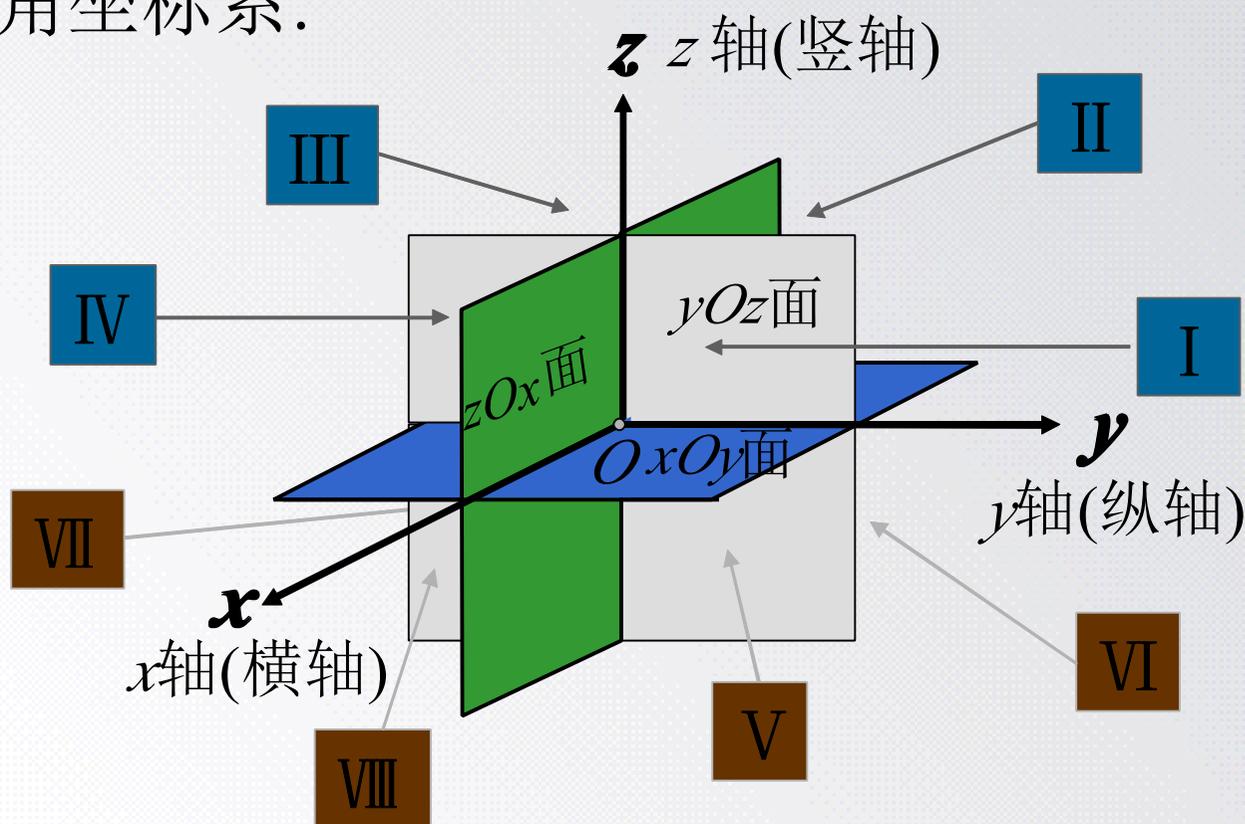


三、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系的基本概念

过空间一定点 O , 由三条互相垂直的数轴按右手规则组成一个空间直角坐标系.

- 坐标原点
- 坐标轴
- 坐标面
- 卦限(八个)



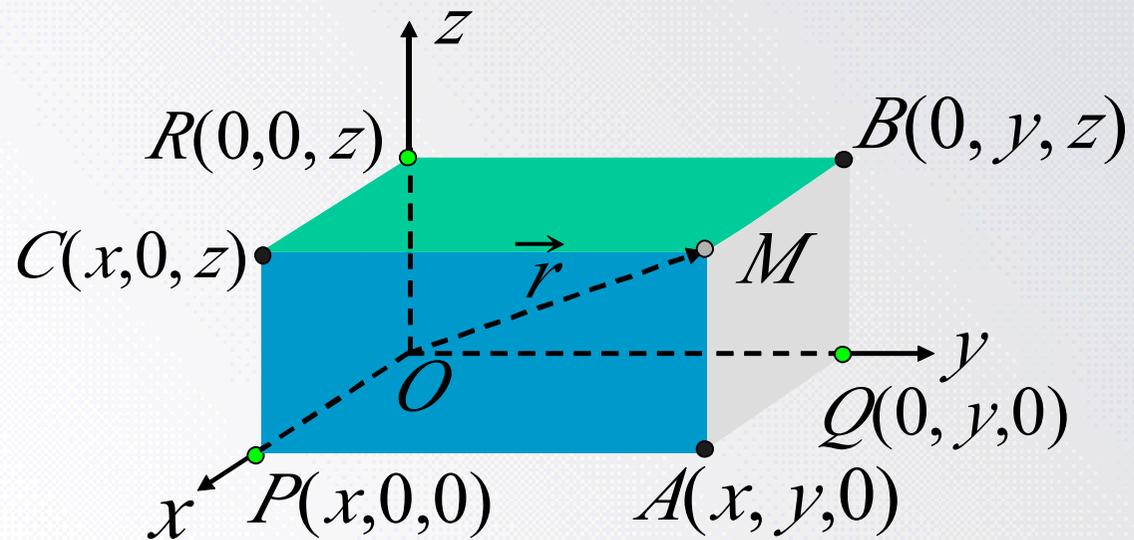
在直角坐标系下

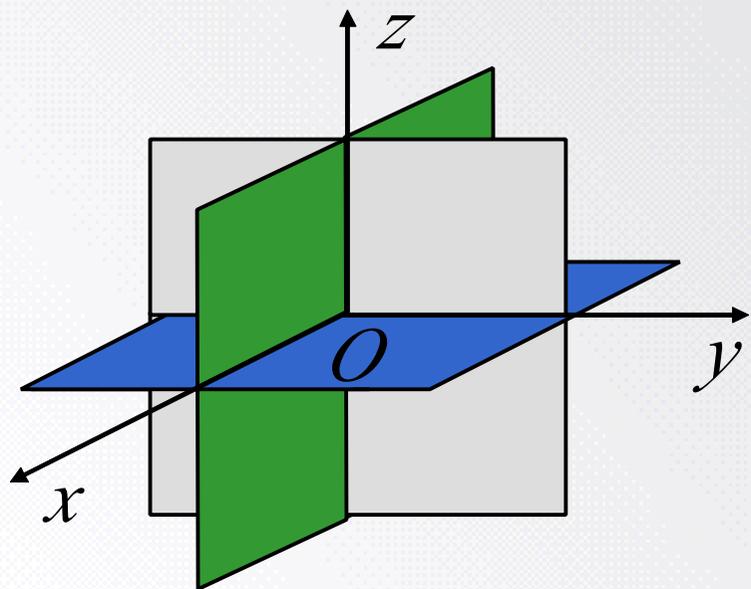
点 M $\xleftrightarrow{1-1}$ 有序数组 (x, y, z) $\xleftrightarrow{1-1}$ 向径 \vec{r}
(称为点 M 的坐标)

特殊点的坐标：

原点 $O(0,0,0)$ ； 坐标轴上的点 P, Q, R ；

坐标面上的点 A, B, C





坐标轴：

$$x\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$y\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$z\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

坐标面：

$$xOy\text{面} \leftrightarrow z=0$$

$$yOz\text{面} \leftrightarrow x=0$$

$$zOx\text{面} \leftrightarrow y=0$$



2. 向量的坐标表示

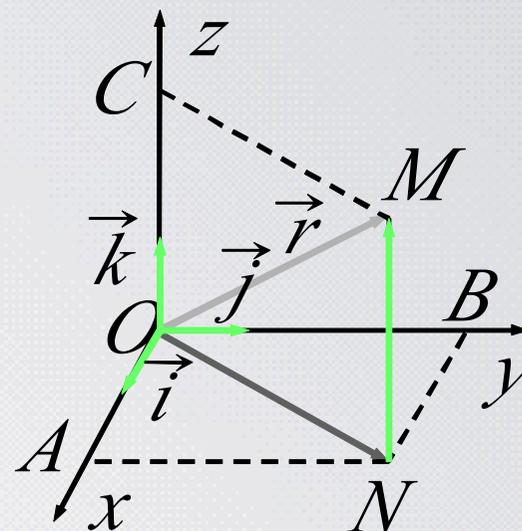
在空间直角坐标系下, 任意向量 \vec{r} 可用向径 \overrightarrow{OM} 表示.

以 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分别表示 x, y, z 轴上的单位向量, 设点 M 的坐标为 $M(x, y, z)$, 则

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = x\vec{i}, \quad \overrightarrow{OB} = y\vec{j}, \quad \overrightarrow{OC} = z\vec{k} \end{array} \right.$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \stackrel{\text{记}}{=} (x, y, z)$$



此式称为向量 \vec{r} 的坐标分解式, $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$ 称为向量 \vec{r} 沿三个坐标轴方向的分向量, x, y, z 称为向量 \vec{r} 的坐标.

四、利用坐标作向量的线性运算

设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, λ 为实数, 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

平行向量对应坐标成比例:

当 $\vec{a} \neq \vec{0}$ 时,

$$\begin{aligned} \vec{b} \parallel \vec{a} &\iff \vec{b} = \lambda \vec{a} \\ &\iff \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} \end{aligned}$$

$$b_x = \lambda a_x$$

$$b_y = \lambda a_y$$

$$b_z = \lambda a_z$$



例2. 求解以向量为未知元的线性方程组

$$\begin{cases} 5\vec{x} - 3\vec{y} = \vec{a} & \text{①} \\ 3\vec{x} - 2\vec{y} = \vec{b} & \text{②} \end{cases}$$

其中 $\vec{a} = (2, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 1, -2)$.

解: $2 \times \text{①} - 3 \times \text{②}$, 得

$$\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = (7, -1, 10)$$

代入②得

$$\vec{y} = \frac{1}{2}(3\vec{x} - \vec{b}) = (11, -2, 16)$$

例3. 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ 及实数 $\lambda \neq -1$, 在 AB 所在直线上求一点 M , 使 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

解: 设 M 的坐标为 (x, y, z) , 如图所示

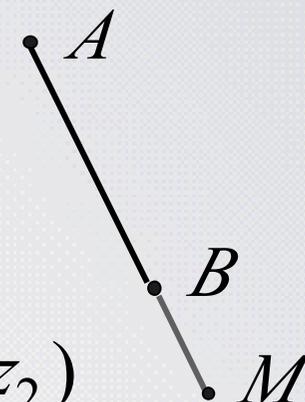
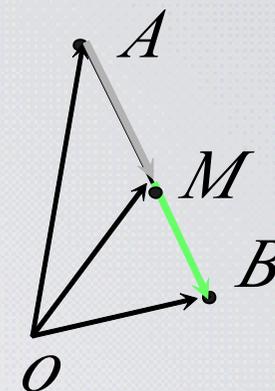
$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$$

得
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda} (\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB})$$

即
$$(x, y, z) = \frac{1}{1+\lambda} (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$$



说明: 由

$$(x, y, z) = \frac{1}{1+\lambda} (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$$

得定比分点公式:

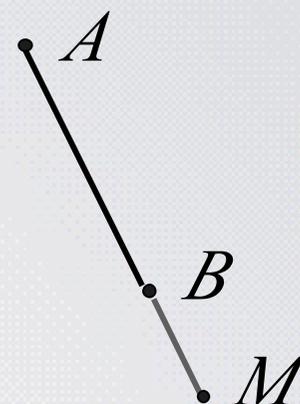
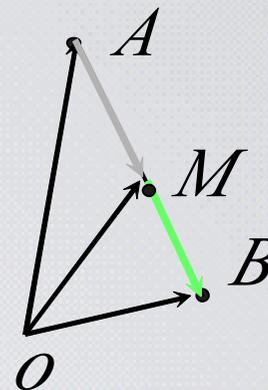
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

当 $\lambda = 1$ 时, 点 M 为 AB 的中点, 于是得

中点公式:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$



五、向量的模、方向角、投影

1. 向量的模与两点间的距离公式

设 $\vec{r} = (x, y, z)$, 作 $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, 则有

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

由勾股定理得

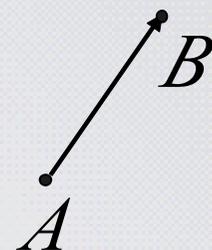
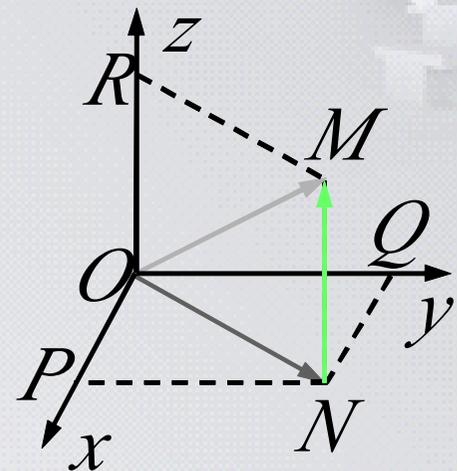
$$|\vec{r}| = |OM| = \sqrt{|OP|^2 + |OQ|^2 + |OR|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

对两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 与 $B(x_2, y_2, z_2)$, 因

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

得两点间的距离公式:

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



例4. 求证以 $M_1(4,3,1), M_2(7,1,2), M_3(5,2,3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.

证:

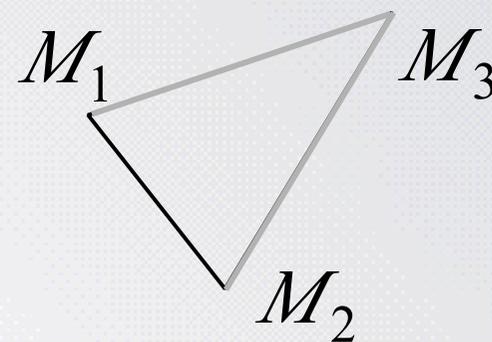
$$\therefore |M_1M_2| = \sqrt{(7-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$|M_2M_3| = \sqrt{(5-7)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$|M_1M_3| = \sqrt{(5-4)^2 + (2-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore |M_2M_3| = |M_1M_3|$$

即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.



例5. 在 z 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$ 及 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点.

解: 设该点为 $M(0, 0, z)$, 因为 $|MA| = |MB|$,

$$\sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (7 - z)^2} = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-2 - z)^2}$$

解得 $z = \frac{14}{9}$, 故所求点为 $M(0, 0, \frac{14}{9})$.

思考:

- (1) 如何求在 xOy 面上与 A, B 等距离之点的轨迹方程?
- (2) 如何求在空间与 A, B 等距离之点的轨迹方程?

提示:

(1) 设动点为 $M(x, y, 0)$, 利用 $|MA| = |MB|$, 得

$$14x + 8y + 28 = 0, \text{ 且 } z = 0$$

(2) 设动点为 $M(x, y, z)$, 利用 $|MA| = |MB|$, 得

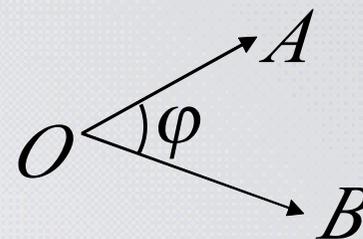
$$7x + 4y - 9z + 14 = 0$$

例6. 已知两点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$, 求 \overrightarrow{AB} 的单位向量 \vec{e} .

解:
$$\vec{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 1, -2)$$
$$= \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}} \right)$$

2. 方向角与方向余弦

设有两非零向量 \vec{a}, \vec{b} , 任取空间一点 O , 作 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, 称 $\varphi = \angle AOB$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) 为向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角. 记作 $(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi$ 或 $(\vec{b}, \vec{a}) = \varphi$

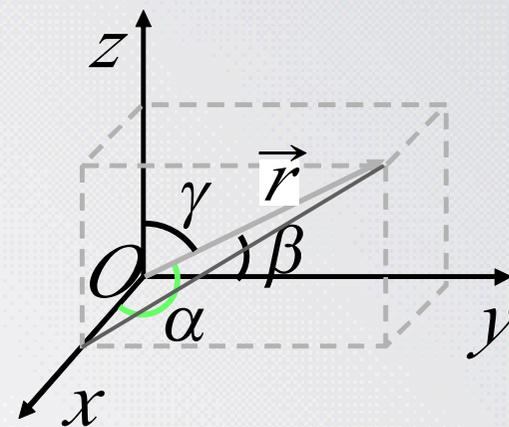


类似可定义向量与轴, 轴与轴的夹角.

给定 $\vec{r} = (x, y, z) \neq \vec{0}$, 称 \vec{r} 与三坐标轴的夹角 α, β, γ 为其方向角.

方向角的余弦称为其方向余弦.

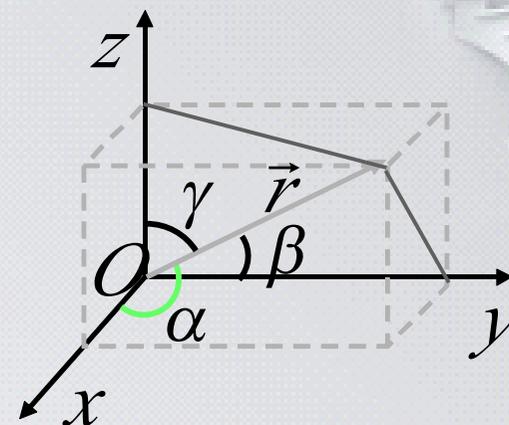
$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$



$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{y}{|\vec{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{|\vec{r}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$



方向余弦的性质： $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

向量 \vec{r} 的单位向量：

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$



例7. 已知两点 $M_1(2, 2, \sqrt{2})$ 和 $M_2(1, 3, 0)$, 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解:
$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= (1-2, 3-2, 0-\sqrt{2}) \\ &= (-1, 1, -\sqrt{2})\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos \beta = \frac{1}{2}, \quad \cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \quad \beta = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{3\pi}{4}$$



例8. 设点 A 位于第一卦限, 向径 \overrightarrow{OA} 与 x 轴 y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$, 且 $|\overrightarrow{OA}| = 6$, 求点 A 的坐标.

解: 已知 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$, 则

$$\cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \frac{1}{4}$$

因点 A 在第一卦限, 故 $\cos \gamma = \frac{1}{2}$, 于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= |\overrightarrow{OA}| \vec{e}_{OA} = 6(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \\ &= 6\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (3, 3\sqrt{2}, 3)\end{aligned}$$

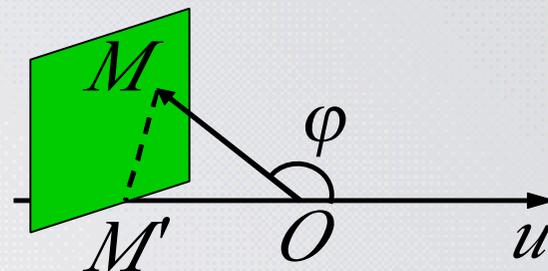
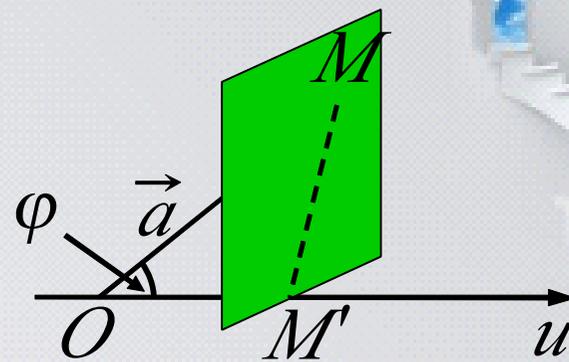
故点 A 的坐标为 $(3, 3\sqrt{2}, 3)$.

3. 向量在轴上的投影

设 \vec{a} 与 u 轴正向的夹角为 φ ，
则 \vec{a} 在轴 u 上的投影为 $|\vec{a}| \cos \varphi$

记作 $\text{Prj}_u \vec{a}$ 或 $(\vec{a})_u$ ，即

$$(\vec{a})_u = |\vec{a}| \cos \varphi$$



例如, $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 在坐标轴上的投影分别为 a_x, a_y, a_z

投影的性质

$$1) \quad \vec{a} + \vec{b} = (\vec{a})_u + (\vec{b})_u$$

$$2) \quad \lambda \vec{a} = \lambda (\vec{a})_u \quad (\lambda \text{ 为实数})$$

例9. 设立方体的一条对角线为 OM , 一条棱为 OA , 且 $|OA| = a$, 求 \vec{OA} 在 \vec{OM} 方向上的投影.

解: 如图所示, 记 $\angle MOA = \varphi$,

$$\cos \varphi = \frac{|OA|}{|OM|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \text{Prj}_{\vec{OM}} \vec{OA} = |\vec{OA}| \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

