第二节 二重积分的计算法

一、利用直角坐标计算二重积分

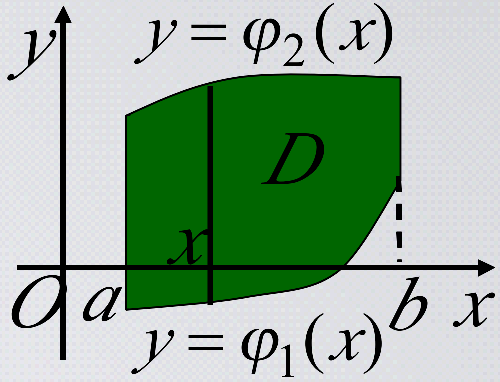
二、利用极坐标计算二重积分

*三、二重积分的换元法

一、利用直角坐标计算二重积分

由曲顶柱体体积的计算可知, 当被积函数 $f(x,y)\geq 0$

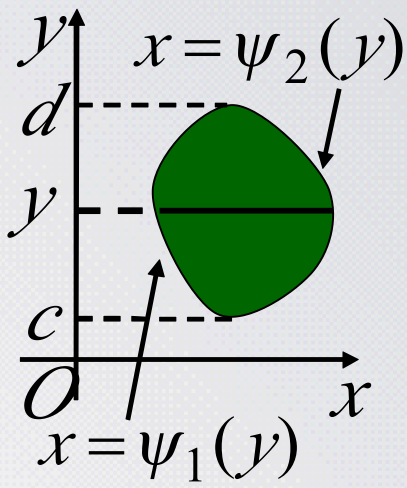
且在D上连续时，若D为 X - 型区域



$$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\leq y\leq \varphi_2(x)\\ a\leq x\leq b\end{cases}$$

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}\,x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

若D为Y - 型区域 $D:\begin{cases}\psi_1(y)\leq x\leq \psi_2(y)\\ c\leq y\leq d\end{cases}$



则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}\,y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

当被积函数 $f(x,y)$在D上变号时, 由于

$$f(x,y)=\underbrace{\frac{f(x,y)+|f(x,y)|}{2}}_{f_1(x,y)}-\underbrace{\frac{|f(x,y)|-f(x,y)}{2}}_{f_2(x,y)}$$ 均非负

$$\therefore\quad \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D f_1(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_D f_2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

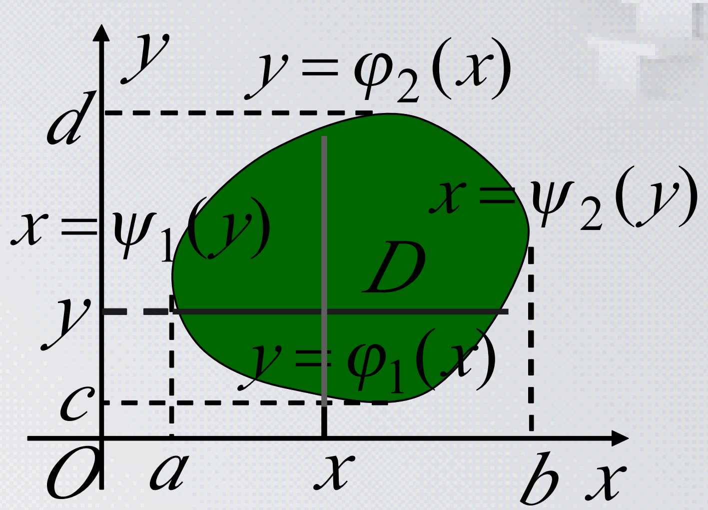
因此上面讨论的累次积分法仍然有效 .

说明: (1) 若积分区域既是 X - 型区域又是 Y - 型区域，

则有 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

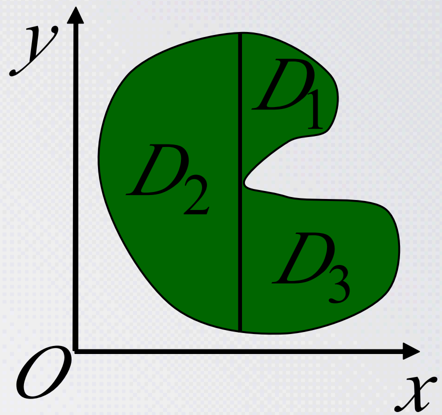
$$= \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$



为计算方便,可选择积分序, 必要时还可以交换积分序.

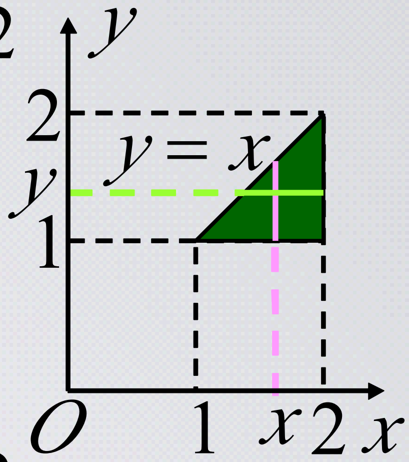
(2) 若积分域较复杂,可将它分成若干 X - 型域或 Y - 型域 , 则

$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3}$$



例**1.** 计算 $I=\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是直线 $y=1,\ x=2,$ 及 $y=x$ 所围的闭区域.

解法**1.** 将 D 看作 X - 型区域, 则 $D:\begin{cases}1\le y\le x\\ 1\le x\le 2\end{cases}$



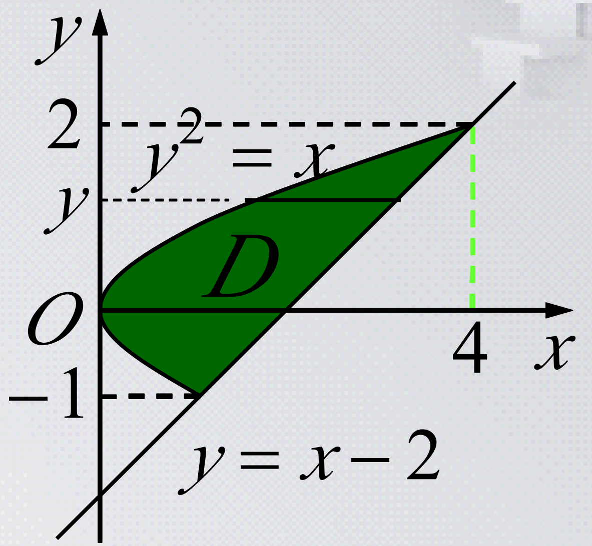
$$I=\int_1^2 \mathrm{d}x\int_1^x xy\,\mathrm{d}y=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}xy^2\right]_1^x \mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}x^3-\tfrac{1}{2}x\right]\mathrm{d}x=\frac{9}{8}$$

解法**2.** 将 D 看作 Y - 型区域, 则 $D:\begin{cases}y\le x\le 2\\ 1\le y\le 2\end{cases}$

$$I=\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^2 xy\,\mathrm{d}x=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}x^2y\right]_y^2 \mathrm{d}y=\int_1^2\left[2y-\tfrac{1}{2}y^3\right]\mathrm{d}y=\frac{9}{8}$$

例2. 计算 $\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是抛物线 $y^2=x$ 及直线 $y=x-2$ 所围成的闭区域.



解: 为计算简便, 先对 x 后对 y 积分,

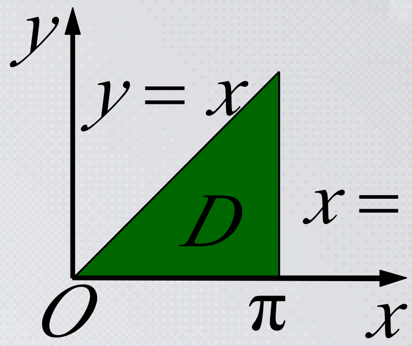
则 $$D:\begin{cases} y^2\le x\le y+2 \\ -1\le y\le 2 \end{cases}$$

$$\therefore \iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}xy\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2y\right]_{y^2}^{y+2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}[y(y+2)^2-y^5]\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4}+\frac{4}{3}y^3+2y^2-\frac{1}{6}y^6\right]_{-1}^{2}=\frac{45}{8}$$

例3. 计算 $\iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是直线 $y=x,\ y=0,\ x=\pi$ 所围成的闭区域.



解: 由被积函数可知, 先对 x 积分不行, 因此取 D 为 X - 型域 :

$$D: \begin{cases} 0 \le y \le x \\ 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

$$\therefore \quad \iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \int_0^{x}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 2$$

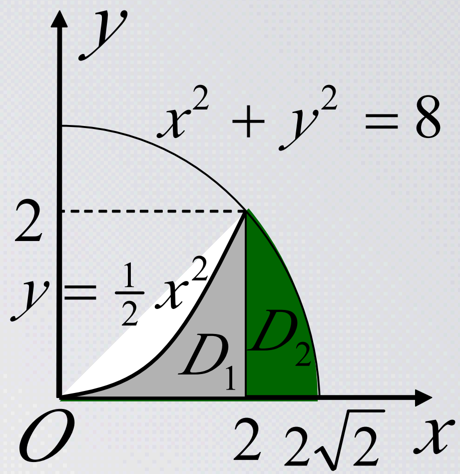
说明: 有些二次积分为了积分方便, 还需交换积分顺序.

例4. 交换下列积分顺序

$$I=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}} \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

解: 积分域由两部分组成:

$$D_1:\begin{cases}0\le y\le \frac{1}{2}x^2\\ 0\le x\le 2\end{cases},\qquad D_2:\begin{cases}0\le y\le \sqrt{8-x^2}\\ 2\le x\le 2\sqrt{2}\end{cases}$$



将 $D=D_1+D_2$ 视为 Y - 型区域，则

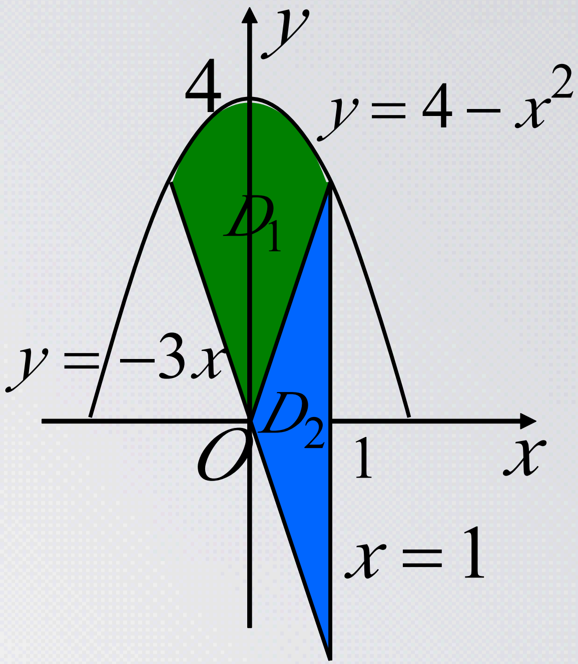
$$D:\begin{cases}\sqrt{2y}\le x\le \sqrt{8-y^2}\\ 0\le y\le 2\end{cases}$$

$$I=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$$

例**5.** 计算$I=\iint_D x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$由$y=4-x^2,\ y=-3x,\ x=1$所围成.

解：令 $f(x,y)=x\ln(y+\sqrt{1+y^2})$

$$D=D_1\cup D_2\ \text{(如图所示)}$$



显然，在D_1上，$f(-x,y)=-f(x,y)$

在D_2上，$f(x,-y)=-f(x,y)$

$$\therefore\quad I=\iint_{D_1} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

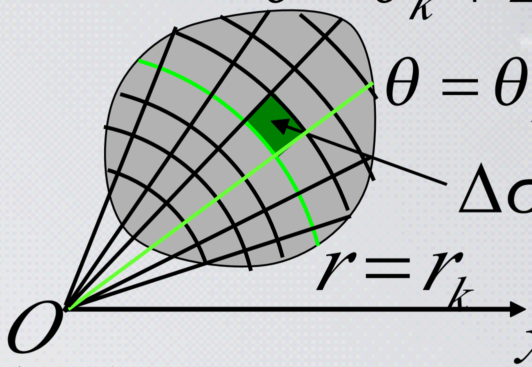
$$+\iint_{D_2} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

二、利用极坐标计算二重积分

在极坐标系下, 用同心圆 r=常数

及射线 θ =常数, 分划区域D 为

$$\Delta\sigma_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

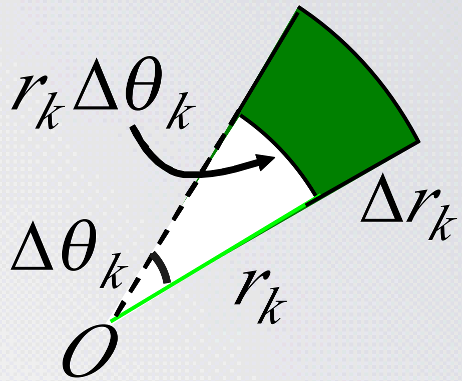


则除包含边界点的小区域外,小区域的面积

$$\Delta\sigma_k = \frac{1}{2}(r_k+\Delta r_k)^2\cdot\Delta\theta_k - \frac{1}{2}r_k^{\,2}\cdot\Delta\theta_k$$

$$= \frac{1}{2}[r_k+(r_k+\Delta r_k)]\Delta r_k\cdot\Delta\theta_k$$

$$= \overline{r_k}\Delta r_k\cdot\Delta\theta_k$$



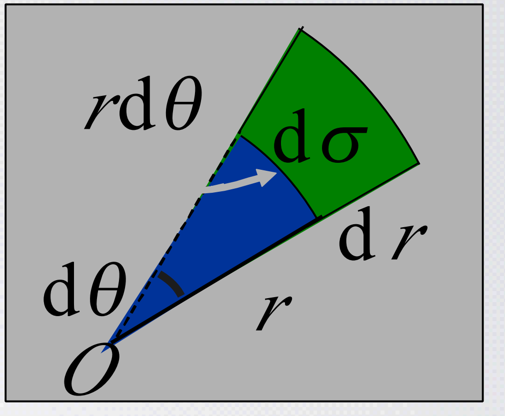
在 $\Delta\sigma_k$ 内取点$(\overline{r_k},\overline{\theta_k})$, 对应有

$$\xi_k=\overline{r_k}\cos\overline{\theta_k},\ \eta_k=\overline{r_k}\sin\overline{\theta_k}$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\overline{r_k}\cos\overline{\theta_k},\overline{r_k}\sin\overline{\theta_k})\overline{r_k}\Delta r_k\Delta\theta_k$$

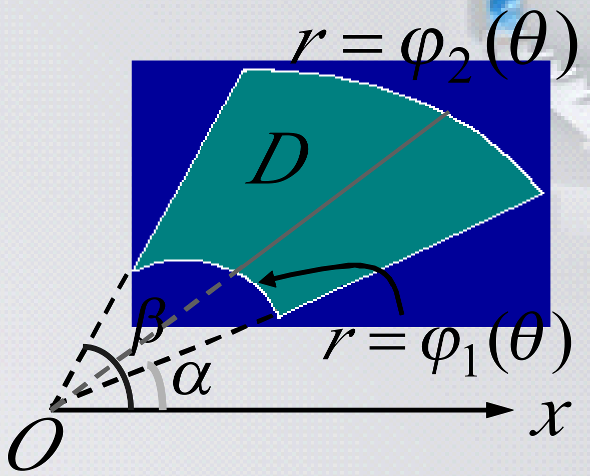
即 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

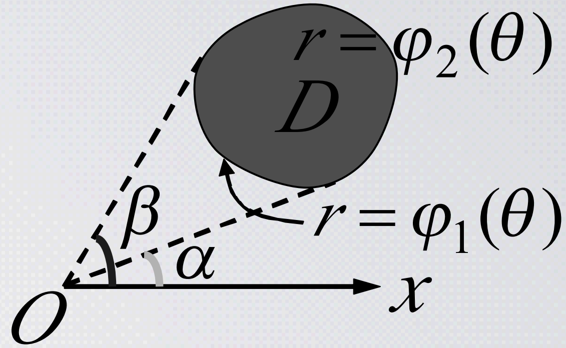


设 $D:\begin{cases}\varphi_1(\theta)\le r\le\varphi_2(\theta)\\ \alpha\le\theta\le\beta\end{cases}$，则

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r$$

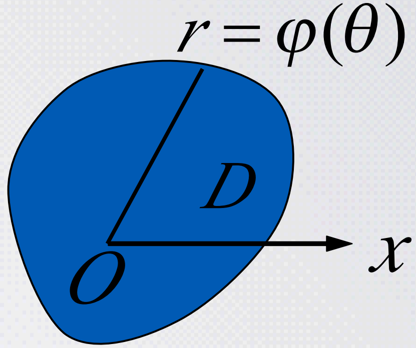




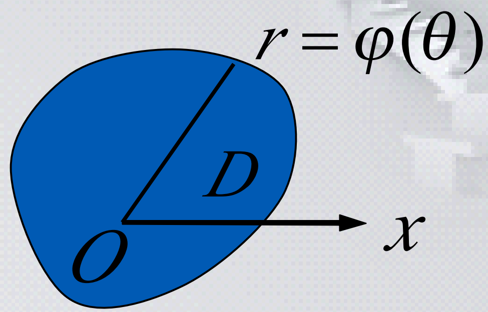
特别, 对 $D:\begin{cases}0\le r\le\varphi(\theta)\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r$$



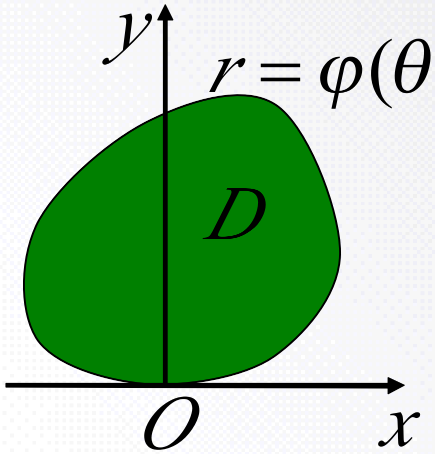
此时若 $f\equiv 1$ 则可求得 D 的面积



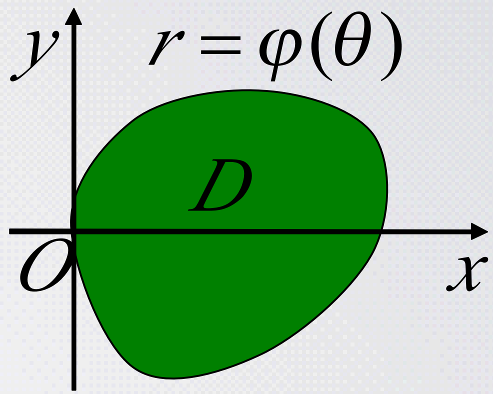
$$\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

思考: 下列各图中域 D 分别与 x, y 轴相切于原点,试问 θ 的变化范围是什么?

(1)



(2)



答: (1) $0 \le \theta \le \pi$; (2) $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

例6. 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, 其中 $D: x^2+y^2 \le a^2$.

解: 在极坐标系下 $D: \begin{cases} 0 \le r \le a \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$, 故

$$原式 = \iint_D e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r e^{-r^2}\,dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{-1}{2} e^{-r^2} \right]_0^a = \pi(1 - e^{-a^2})$$

由于 e^{-x^2} 的原函数不是初等函数 , 故本题无法用直角坐标计算.

注: 利用上题可得一个在概率论与数理统计及工程上非常有用的反常积分公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, d\,x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad ①$$

事实上,
$$\iint_{R^2} e^{-x^2-y^2} \, dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, d\,x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \, d\,y$$

$$= 4\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, d\,x\right)^2$$

又
$$\iint_{R^2} e^{-x^2-y^2} \, dx dy = \lim_{a\to+\infty} \iint_{x^2+y^2\le a^2} e^{-x^2} \, d\,x$$

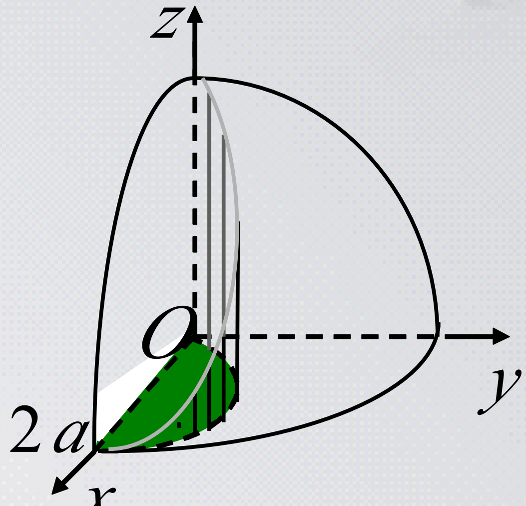
$$= \lim_{a\to+\infty} \pi\,(1-e^{-a^2}) = \pi$$

故①式成立 .

例7. 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$ 所截得的(含在柱面内的)立体的体积.

解: 设 $D: 0\le r\le 2a\cos\theta,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

由对称性可知

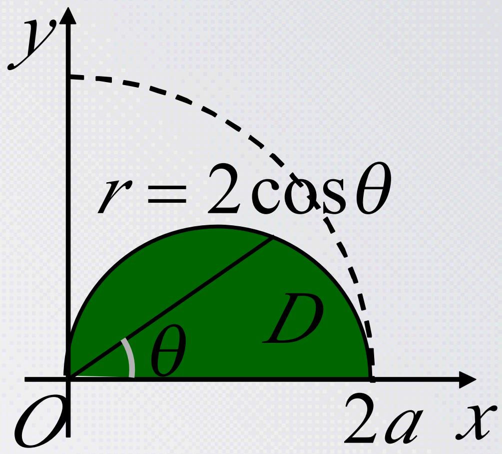


$$V=4\iint_D\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{32}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

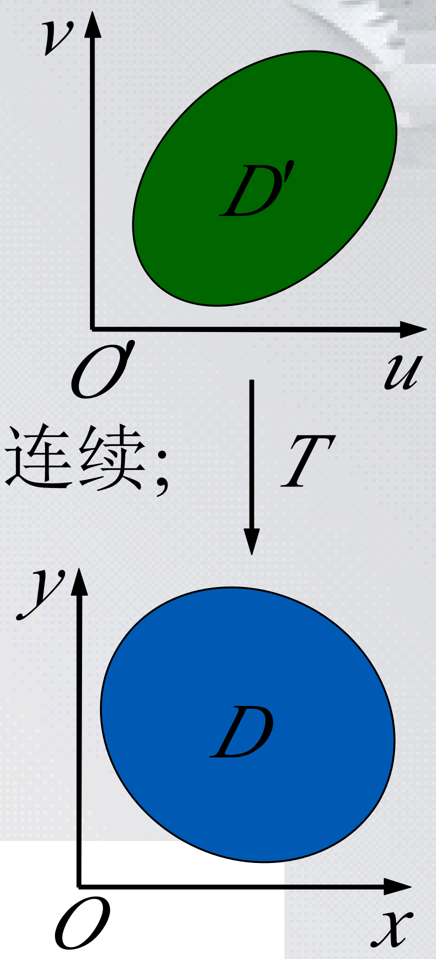
$$=\frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$



*三、二重积分换元法

定理： 设 $f(x,y)$ 在闭域 D 上连续，变换：

$$T:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad (u,v)\in D' \to D$$



满足 (1) $x(u,v),\ y(u,v)$ 在 D' 上一阶偏导数连续；

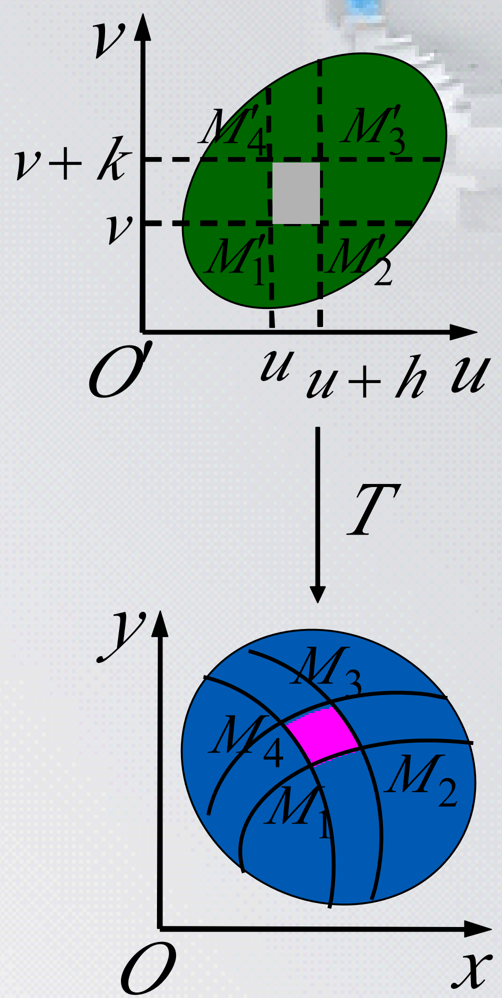
(2) 在 D' 上 雅可比行列式

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0;$$

(3) 变换 $T: D'\to D$ 是一一对应的，

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,\left|J(u,v)\right|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

证: 根据定理条件可知变换 T 可逆.



在 $uO'v$ 坐标面上, 用平行于坐标轴的直线分割区域 D', 任取其中一个小矩形, 其顶点为

$$M_1'(u,v),\qquad M_2'(u+h,v),$$
$$M_3'(u+h,v+k),\quad M_4'(u,v+k).$$

通过变换 T, 在 xOy 面上得到一个四边形, 其对应顶点为 $M_i(x_i,y_i)\ (i=1,2,3,4)$

令 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$, 则

$$x_2-x_1=x(u+h,v)-x(u,v)=\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u,v)}h+o(\rho)$$

$$x_4 - x_1 = x(u, v+k) - x(u, v) = \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{(u,v)} k + o(\rho)$$

同理得 $y_2 - y_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u,v)} h + o(\rho)$

$$y_4 - y_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{(u,v)} k + o(\rho)$$

当h, k充分小时，曲边四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 近似于平行四边形，故其面积近似为

$$\Delta\sigma \approx \left| \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4} \right| = \left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{matrix} \right\|$$

$$\approx \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} h & \frac{\partial y}{\partial u} k \\ \frac{\partial x}{\partial v} h & \frac{\partial y}{\partial v} k \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right\| hk = \left| J(u, v) \right| hk$$

因此面积元素的关系为 $d\sigma = |J(u,v)|\,du\,dv$

从而得二重积分的换元公式:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

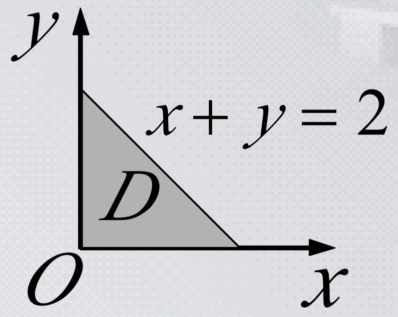
例如, 直角坐标转化为极坐标时, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & -r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\therefore \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

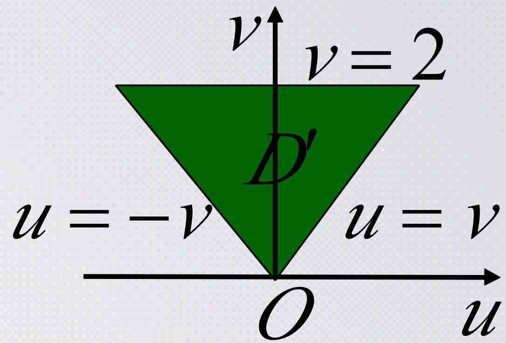
$$= \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

例8. 计算 $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是 x 轴 y 轴和直线 $x+y=2$ 所围成的闭域.



解: 令 $u=y-x,\ v=y+x$, 则

$$x=\frac{v-u}{2},\ y=\frac{v+u}{2}\quad (D'\to D)$$

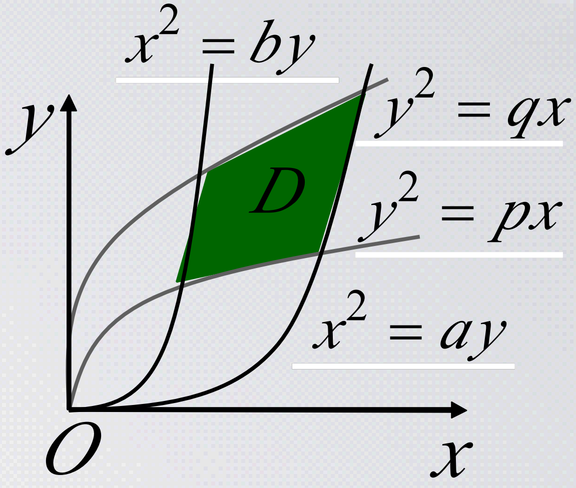


$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{-1}{2}$$

$$\therefore \iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'} e^{\frac{u}{v}}\left|\frac{-1}{2}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^2\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}e^{\frac{u}{v}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2(e-e^{-1})\,v\,\mathrm{d}v=e-e^{-1}$$

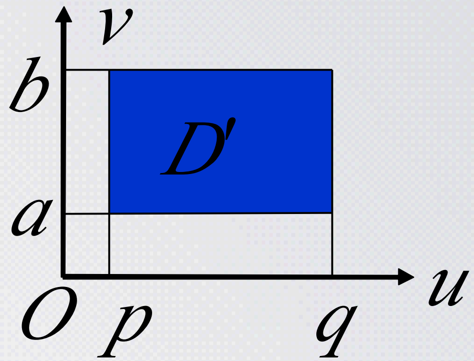
例9. 计算由 $y^2 = px,\ y^2 = qx,\ x^2 = ay,\ x^2 = by$ $(0 < p < q,\ 0 < a < b)$ 所围成的闭区域 D 的面积 S.



解: 令 $u = \dfrac{y^2}{x},\ v = \dfrac{x^2}{y}$, 则

$$D': \begin{cases} p \le u \le q \\ a \le v \le b \end{cases} \longrightarrow D$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -\frac{1}{3}$$



$$\therefore S = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D'} |J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\int_p^q \mathrm{d}u \int_a^b \mathrm{d}v = \frac{1}{3}(q-p)(b-a)$$

例10. 试计算椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积 V.

解: 取 $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$, 由对称性

$$V=2\iint_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2c\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

令 $x=ar\cos\theta$, $y=br\sin\theta$, 则 D 的原象为

$$D':r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix}=abr$$

$$\therefore\quad V=2c\iint_{D'}\sqrt{1-r^2}\;abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\;r\,\mathrm{d}r=\frac{4}{3}\pi abc$$