

# 第三节

## 三重积分

一、三重积分的概念

二、三重积分的计算



# 一、三重积分的概念

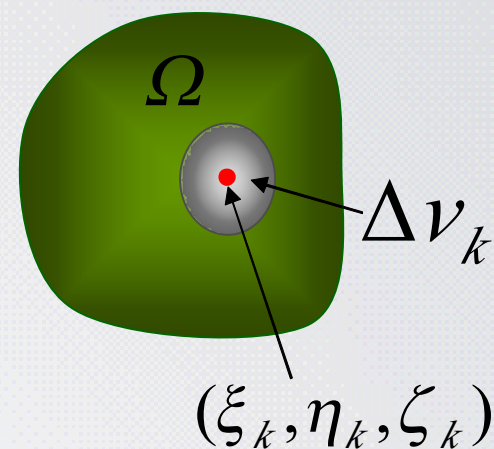
引例: 设在空间有限闭区域  $\Omega$  内分布着某种不均匀的物质, 密度函数为  $\mu(x, y, z) \in C$ , 求分布在  $\Omega$  内的物质的质量  $M$ .

解决方法: 类似二重积分解决问题的思想, 采用

“大化小, 常代变, 近似和, 求极限”

可得

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mu(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k$$



定义. 设  $f(x, y, z), (x, y, z) \in \Omega$ , 若对  $\Omega$  作任意分割:  $\Delta v_k (k=1, 2, \dots, n)$ , 任意取点  $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \Delta v_k$ , 下列“乘积和式”极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k \stackrel{\text{记作}}{=} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) d v$$

存在, 则称此极限为函数  $f(x, y, z)$  在  $\Omega$  上的三重积分.  $d v$  称为体积元素, 在直角坐标系下常写作  $d x d y d z$ .

性质: 三重积分的性质与二重积分相似. 例如

中值定理. 设  $f(x, y, z)$  在有界闭域  $\Omega$  上连续,  $V$  为  $\Omega$  的体积, 则存在  $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega$ , 使得

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) d v = f(\xi, \eta, \zeta) V$$

## 二、三重积分的计算

### 1. 利用直角坐标计算三重积分

先假设连续函数  $f(x, y, z) \geq 0$ , 并将它看作某物体的密度函数, 通过计算该物体的质量引出下列各计算方法:

方法**1**. 投影法 (“先一后二”)

方法**2**. 截面法 (“先二后一”)

方法**3**. 三次积分法

最后, 推广到一般可积函数的积分计算.

## 方法1. 投影法 (“先一后二”)

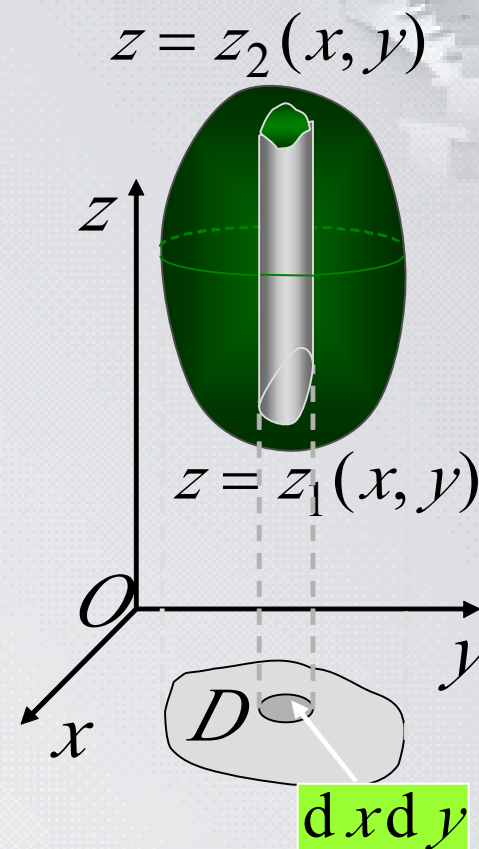
$$\Omega: \begin{cases} z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \\ (x, y) \in D \end{cases}$$

细长柱体微元的质量为

$$\left( \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

该物体的质量为

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) d v \\ &= \iint_D \left( \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy \\ & \underline{\underline{\text{记作}}} \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \end{aligned}$$



微元线密度  $\approx$   
 $f(x, y, z) dx dy$

## 方法2. 截面法 (“先二后一”)

$$\Omega: \begin{cases} (x, y) \in D_z \\ a \leq z \leq b \end{cases}$$

以 $D_z$ 为底,  $dz$ 为高的柱形薄片质量为

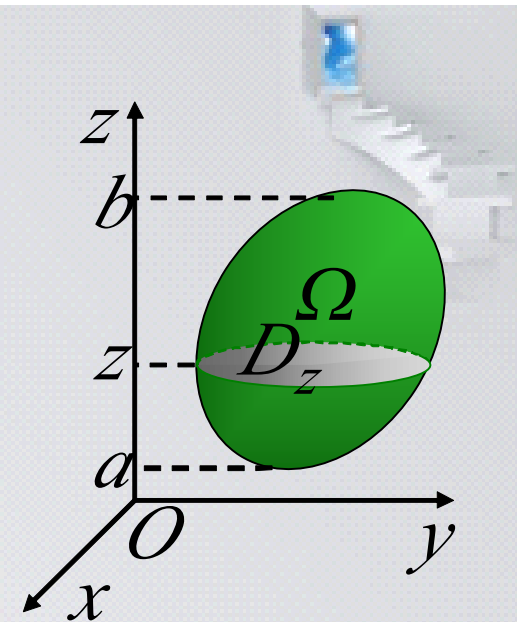
$$\left( \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

该物体的质量为

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$$

$$= \int_a^b \left( \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

记作  $\int_a^b dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$



面密度  $\approx$   
 $f(x, y, z) dz$

### 方法3. 三次积分法

$$\text{设区域 } \Omega : \begin{cases} z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \\ (x, y) \in D : \begin{cases} y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases} \end{cases}$$

利用投影法结果，把二重积分化成二次积分即得：

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, d\nu \\ = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \end{aligned}$$

---

投影法

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, d\nu = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

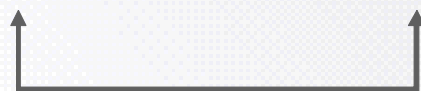


当被积函数在积分域上变号时, 因为

$$f(x, y, z)$$

$$= \frac{|f(x, y, z)| + f(x, y, z)}{2} - \frac{|f(x, y, z)| - f(x, y, z)}{2}$$

$$= f_1(x, y, z) - f_2(x, y, z)$$



均为非负函数

根据重积分性质仍可用前面介绍的方法计算.



## 小结: 三重积分的计算方法

### 方法1. “先一后二”

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) d\nu = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

### 方法2. “先二后一”

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) d\nu = \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$$

### 方法3. “三次积分”

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) d\nu = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

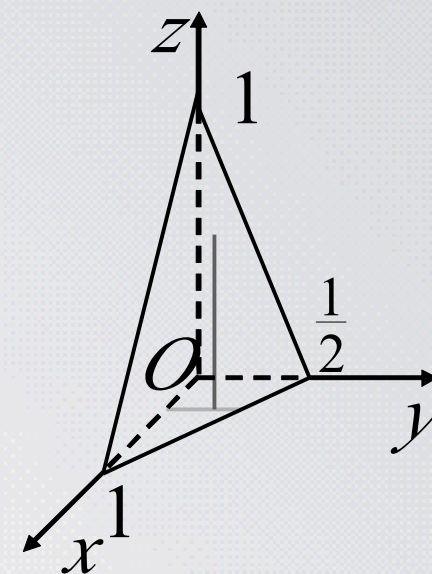
三种方法(包含12种形式)各有特点, 具体计算时应根据被积函数及积分域的特点灵活选择.



例1. 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  为三个坐标面及平面  $x+2y+z=1$  所围成的闭区域.

$$\text{解: } \Omega : \begin{cases} 0 \leq z \leq 1-x-2y \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2}(1-x) \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

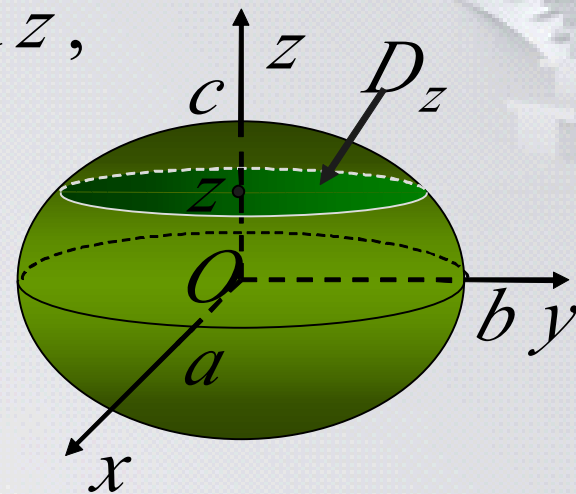
$$\begin{aligned} \therefore \iiint_{\Omega} x dx dy dz &= \int_0^1 x dx \int_0^{\frac{1}{2}(1-x)} dy \int_0^{1-x-2y} dz \\ &= \int_0^1 x dx \int_0^{\frac{1}{2}(1-x)} (1-x-2y) dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (x-2x^2+x^3) dx = \frac{1}{48} \end{aligned}$$



例2. 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ ,

其中  $\Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ .

解:  $\Omega: \begin{cases} -c \leq z \leq c \\ D_z: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2} \end{cases}$



用“先二后一”

$$\begin{aligned} \therefore \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz &= \int_{-c}^c z^2 dz \iint_{D_z} dx dy \\ &= 2 \int_{-c}^c z^2 \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \frac{4}{15} \pi abc^3 \end{aligned}$$

## 2. 利用柱坐标计算三重积分

设  $M(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ , 将  $x, y$  用极坐标  $\rho, \theta$  代替, 则  $(\rho, \theta, z)$  就称为点  $M$  的柱坐标. 直角坐标与柱面坐标的关系:

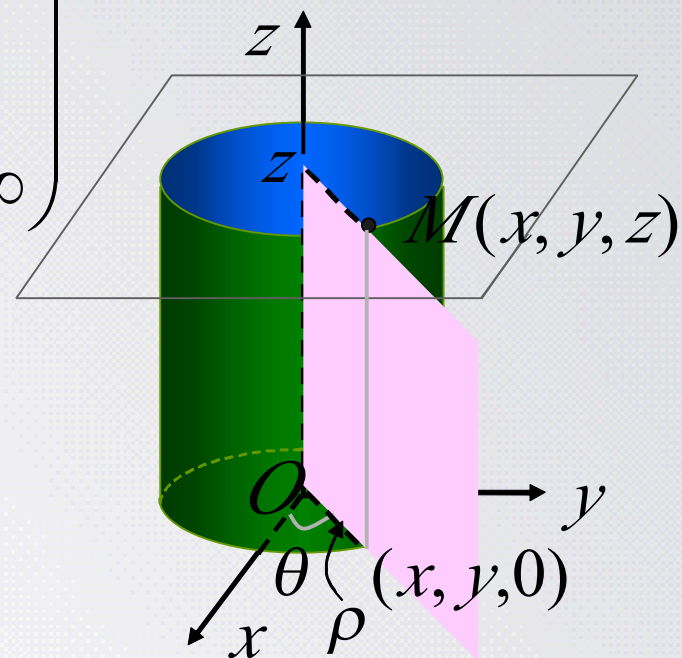
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \rho < +\infty \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

坐标面分别为

$\rho = \text{常数}$   $\longrightarrow$  圆柱面

$\theta = \text{常数}$   $\longrightarrow$  半平面

$z = \text{常数}$   $\longrightarrow$  平面



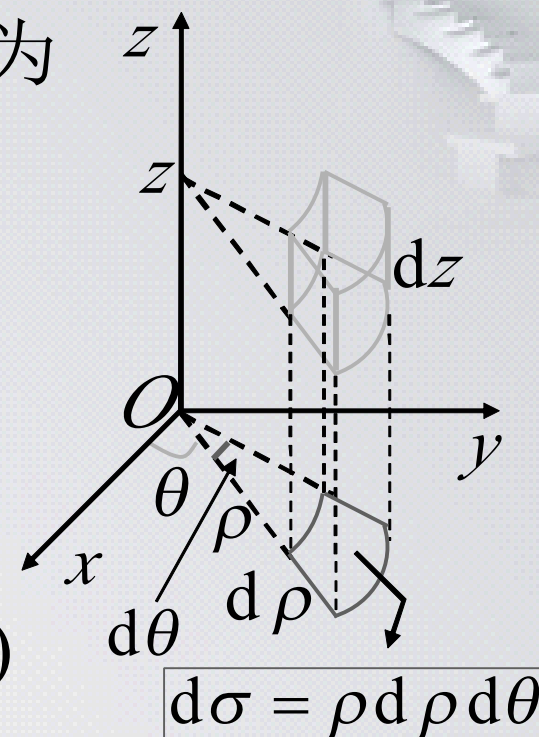
如图所示, 在柱面坐标系中体积元素为

$$d v = \rho d \rho d \theta d z$$

因此 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) d x d y d z$$

$$= \iiint_{\Omega} F(\rho, \theta, z) \rho d \rho d \theta d z$$

其中 
$$F(\rho, \theta, z) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$$

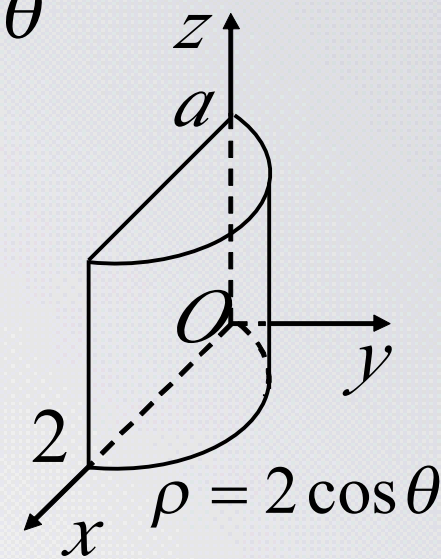


适用范围:

- 1) 积分域表面用柱面坐标表示时方程简单;
- 2) 被积函数用柱面坐标表示时变量互相分离.

例3. 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$  其中  $\Omega$  为由柱面  $x^2 + y^2 = 2x$  及平面  $z = 0, z = a (a > 0), y = 0$  所围成半圆柱体.

解: 在柱面坐标系下  $\Omega : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \cos \theta \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq z \leq a \end{cases}$

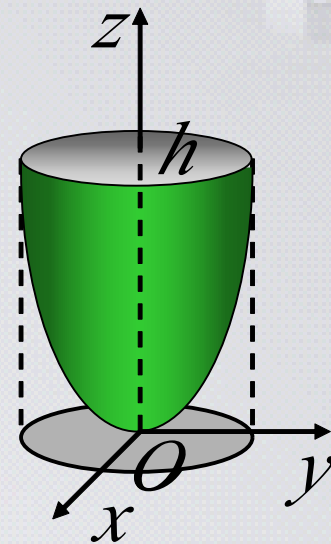


$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} z \rho^2 d\rho d\theta dz \\ &= \int_0^a z dz \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \rho^2 d\rho \\ &= \frac{4a^2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \frac{8}{9} a^2 \end{aligned}$$

$$dv = \rho d\rho d\theta dz$$

例4. 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{1+x^2+y^2}$ , 其中  $\Omega$  由抛物面  $x^2+y^2=4z$  与平面  $z=h$  ( $h>0$ ) 所围成.

解: 在柱面坐标系下  $\Omega$  : 
$$\begin{cases} \frac{\rho^2}{4} \leq z \leq h \\ 0 \leq \rho \leq 2\sqrt{h} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$



$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{h}} \frac{\rho}{1+\rho^2} d\rho \int_{\frac{\rho^2}{4}}^h dz$$

$$dv = \rho d\rho d\theta dz$$

$$= 2\pi \int_0^{2\sqrt{h}} \frac{\rho}{1+\rho^2} \left(h - \frac{\rho^2}{4}\right) d\rho$$

$$= \frac{\pi}{4} [(1+4h) \ln(1+4h) - 4h]$$

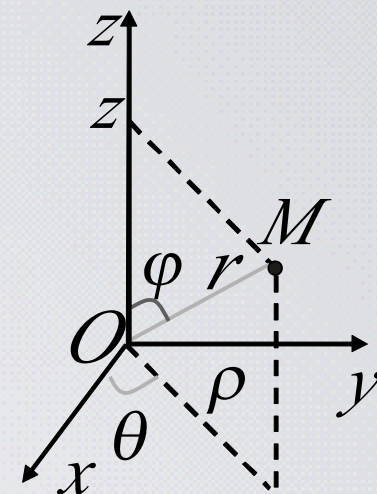


### 3. 利用球坐标计算三重积分

设  $M(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ , 其柱坐标为  $(\rho, \theta, z)$ , 令  $|\overrightarrow{OM}| = r$ ,  $\angle zOM = \varphi$ , 则  $(r, \theta, \varphi)$  就称为点  $M$  的球坐标.

直角坐标与球面坐标的关系

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \begin{pmatrix} 0 \leq r < +\infty \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{pmatrix}$$

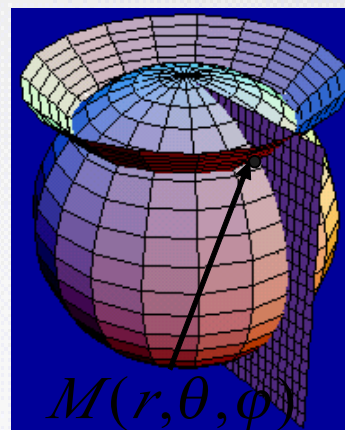


坐标面分别为

$r = \text{常数}$   $\longrightarrow$  球面

$\theta = \text{常数}$   $\longrightarrow$  半平面

$\varphi = \text{常数}$   $\longrightarrow$  锥面



$$\begin{aligned} \rho &= r \sin \varphi \\ z &= r \cos \varphi \end{aligned}$$

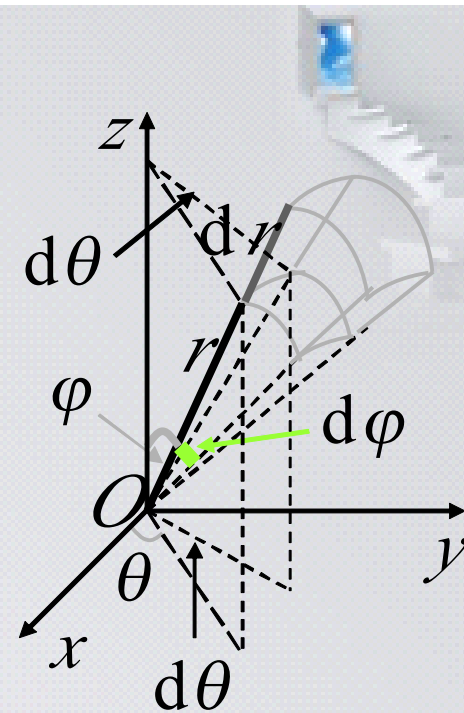


如图所示, 在球面坐标系中体积元素为

$$d v = r^2 \sin \varphi d r d \varphi d \theta$$

因此有

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) d x d y d z \\ &= \iiint_{\Omega} F(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \varphi d r d \varphi d \theta \end{aligned}$$



其中  $F(r, \theta, \varphi) = f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi)$

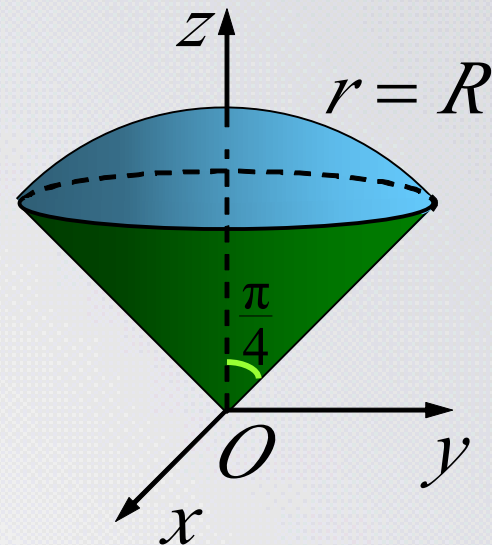
适用范围:

- 1) 积分域表面用球面坐标表示时方程简单;
- 2) 被积函数用球面坐标表示时变量互相分离.

例5. 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  为锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  所围立体.

解: 在球面坐标系下

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \therefore \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr \\ &= \frac{1}{5} \pi R^5 (2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$d\nu = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

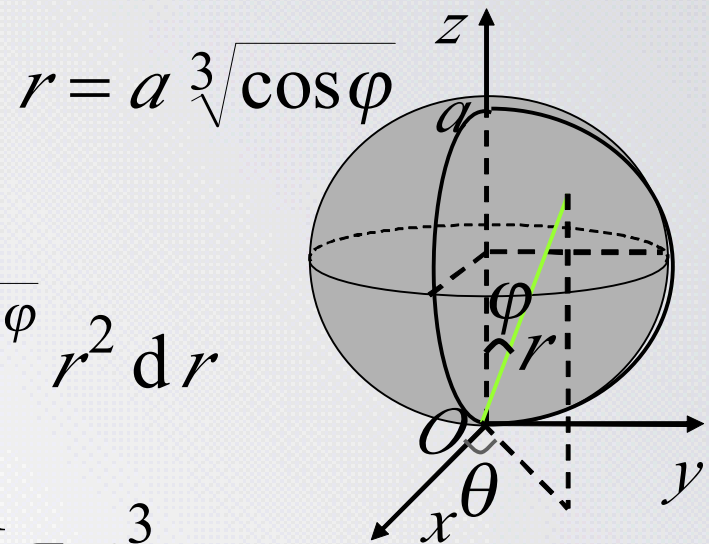
例6. 求曲面  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$  ( $a > 0$ ) 所围立体体积.

解: 由曲面方程可知, 立体位于  $xOy$  面上部, 且关于  $xOz$   $yOz$  面对称, 并与  $xOy$  面相切, 故在球坐标系下所围立体为

$$\Omega: 0 \leq r \leq a \sqrt[3]{\cos \varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

利用对称性, 所求立体体积为

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} d\nu \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^{a \sqrt[3]{\cos \varphi}} r^2 dr \\ &= \frac{2}{3} \pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{3} \pi a^3 \end{aligned}$$



$$d\nu = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$