第十二章

无穷级数

$$\text{无穷级数}\begin{cases}\text{数项级数}\\ \text{幂级数}\\ \text{傅氏级数}\end{cases}$$

$$\text{无穷级数是研究函数的工具}\begin{cases}\text{表示函数}\\ \text{研究性质}\\ \text{数值计算}\end{cases}$$

第一节 常数项级数的概念和性质

一、常数项级数的概念

二、无穷级数的基本性质

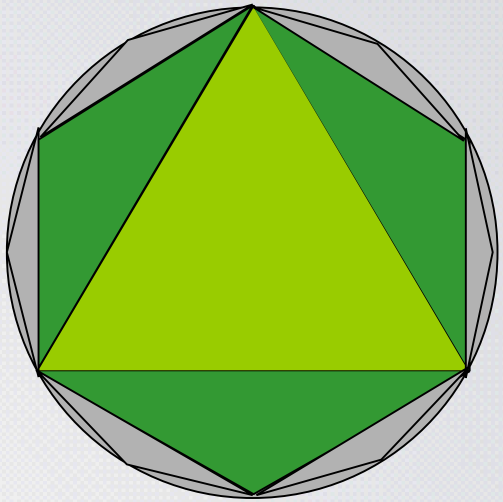
三、级数收敛的必要条件

*四、柯西审敛原理

一、常数项级数的概念

引例1. 用圆内接正多边形面积逼近圆面积.

依次作圆内接正 3×2^n $(n=0,1,2,\cdots)$边形, 设 a_0 表示内接正三角形面积, a_k 表示边数增加时增加的面积, 则圆内接正 3×2^n 边形面积为



$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$$

$n\to\infty$时, 这个和逼近于圆的面积 A .

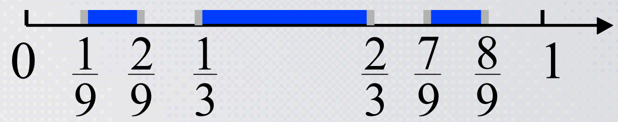
即

$$A=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

引例**2.** (神秘的康托尔尘集) 把[0,1]区间三等分, 舍弃中间的开区间 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$,将剩下的两个子区间分别三等分,并舍弃在中间的开区间, 如此反复进行这种“弃中”操作, 问丢弃部分的总长和剩下部分的总长各是多少?

丢弃的各开区间长依次为 $\frac{1}{3},\ \frac{2}{3^2},\ \frac{2^2}{3^3},\ \frac{2^3}{3^4},\ \cdots,\ \frac{2^{n-1}}{3^n},\ \cdots$

故丢弃部分总长



$$l_{\text{丢}}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{2^3}{3^4}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3^n}+\cdots$$

$$=\frac{1}{3}\Big[1+\frac{2}{3}+(\frac{2}{3})^2+(\frac{2}{3})^3+\cdots+(\frac{2}{3})^{n-1}+\cdots\Big]=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1$$

(此式计算用到后面的例1)

剩余部分总长 $\quad l_{\text{剩}}=1-l_{\text{丢}}=0$

剩余部分总长虽然为0, 但康托尔证明了其成员和实数“一样多”, 它们象尘埃一样散落在[0, 1]区间上, 人们称其为康托尔尘集.

引例3. 小球从 1 m 高处自由落下, 每次跳起的高度减少一半,问小球是否会在某时刻停止运动? 说明道理.

由自由落体运动方程 $s=\frac{1}{2}g t^2$ 知 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$

设 t_k 表示第 k 次小球落地的时间, 则小球运动的时间为

$$T=t_1+2t_2+2t_3+\cdots$$

$$=\sqrt{\frac{2}{g}}\left[1+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{(\sqrt{2})^2}+\cdots\right)\right]$$

(此式计算用到后面的例1)

$$=\sqrt{\frac{2}{g}}\left[1+2\left(\sqrt{2}+1\right)\right]\approx 2.63\ (\mathrm{s})$$

定义：给定一个数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ 将各项依次相加, 简记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称上式为无穷级数, 其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项, 级数的前 n 项和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

称为级数的部分和. 若 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在, 则称无穷级数收敛, 并称 S 为级数的和, 记作

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在, 则称无穷级数发散 .

当级数收敛时, 称差值

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

为级数的余项. 显然

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

例1. 讨论等比级数 (又称几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = a + a q + a q^2 + \cdots + a q^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

(q 称为公比) 的敛散性.

解: 1) 若 $q \neq 1$, 则部分和

$$S_n = a + a q + a q^2 + \cdots + a q^{n-1} = \frac{a - a q^n}{1 - q}$$

当 $|q| < 1$ 时, 由于 $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$, 从而 $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$

因此级数收敛 , 其和为 $\frac{a}{1-q}$;

当 $|q| > 1$ 时, 由于 $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = \infty$, 从而 $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$,

因此级数发散 .

$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n, \ (a \neq 0)$

2). 若 $|q| = 1$, 则

当 $q = 1$时, $S_n = n a \to \infty$,因此级数发散 ;

当 $q = -1$时, 级数成为

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1} a + \cdots$$

因此 $S_n = \begin{cases} a, & n\text{ 为奇数} \\ 0, & n\text{ 为偶数} \end{cases}$

从而 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在 , 因此级数发散.

综合 1)、2)可知, $|q| < 1$ 时, 等比级数收敛 ;

$|q| \geq 1$ 时, 等比级数发散 .

例**2.** 判别下列级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

解: (1)

$$S_n=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}$$

$$=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+(\ln(n+1)-\ln n)$$

$$=\ln(n+1)\to\infty\quad(n\to\infty)$$

所以级数 (1) 发散 ;

技巧:

利用 "拆项相消" 求和

$$(2)\quad S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}\to 1\quad(n\to\infty)$$

所以级数 (2) 收敛, 其和为 1 .

技巧:

利用 “拆项相消” 求和

例3. 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性 .

解:

$$\because \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\ln\frac{n^2-1}{n^2}=\ln(n+1)+\ln(n-1)-2\ln n$$

$$\therefore S_n=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

$$=[\underline{\ln 3}+\ln 1\underline{-2\ln 2}]+[\ln 4+\underline{\ln 2}\underline{-2\ln 3}]+[\ln 5+$$

$$+\underline{\ln 3}-2\ln 4]+\cdots+[\underline{\ln(n+1)}+\ln(n-1)\underline{-2\ln n}]$$

$$=-\ln 2+\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 2$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n=-\ln 2$, 故原级数收敛 , 其和为 $-\ln 2$.

二、无穷级数的基本性质

性质1. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S, 即 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, 则各项乘以常数 c 所得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c u_n$ 也收敛，其和为 cS.

证: 令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, 则 $\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n} c u_k = c S_n$,

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = cS$$

这说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c u_n$ 收敛，其和为 cS.

说明: 级数各项乘以非零常数后其敛散性不变 .

性质2. 设有两个收敛级数

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\qquad \sigma=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S\pm\sigma$.

证: 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,\ \sigma_n=\sum_{k=1}^{n}v_k$, 则

$$\tau_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k\pm v_k)=S_n\pm\sigma_n\to S\pm\sigma\quad(n\to\infty)$$

这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S\pm\sigma$.

说明:

(1) 性质2 表明收敛级数可逐项相加或相减 .

(2) 若两级数中一个收敛一个发散 , 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 必发散 . (用反证法可证)

但若二级数都发散 , $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 不一定发散.

例如, 取 $u_n = (-1)^{2n},\ v_n = (-1)^{2n+1}$,

而 $u_n + v_n = 0$

性质3. 在级数前面加上或去掉有限项, 不会影响级数的敛散性.

证: 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 k 项去掉, 所得新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{k+n}$ 的部分和为

$$\sigma_n = \sum_{l=1}^{n} u_{k+l} = S_{k+n} - S_k$$

由于 $n \to \infty$ 时, σ_n 与 S_{k+n} 极限状况相同, 故新旧两级数敛散性相同.

当级数收敛时, 其和的关系为 $\sigma = S - S_k$.

类似可证前面加上有限项的情况 .

性质4. 收敛级数加括弧后所成的级数仍收敛于原级数的和.

证: 设收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, 若按某一规律加括弧, 例如

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots$$

则新级数的部分和序列 $\sigma_m\ (m=1,2,\cdots)$为原级数部分和序列 $S_n\ (n=1,2,\cdots)$的一个子序列, 因此必有

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_m=\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

用反证法可证

推论: 若加括弧后的级数发散, 则原级数必发散.

注意: 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如, $(1-1)+(1-1)+\cdots=0$, 但 $1-1+1-1+\cdots$ 发散.

三、级数收敛的必要条件

设收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

证: $u_n = S_n - S_{n-1}$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

可见: 若级数的一般项不趋于**0**, 则级数必发散 **.**

例如, $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}+\cdots$, 其一般项为

$$u_n = (-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$$

当$n\to\infty$时, u_n不趋于0, 因此这个级数发散.

注意: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 并非级数收敛的充分条件.

例如, 调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

虽然 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, 但此级数发散 .

事实上, 假设调和级数收敛于 S, 则

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$$

但 $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

矛盾! 所以假设不真 .

例4.判断级数的敛散性:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$$

解: 考虑加括号后的级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)+\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{2}{n-1}$$

$\therefore \quad \sum_{n=2}^{\infty} a_n = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 , 从而原级数发散 .

例5. 判断下列级数的敛散性, 若收敛求其和:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n};\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3n^2+2n};\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}.$$

解: (1) 令 $u_n=\dfrac{e^n n!}{n^n}$, 则

$$\boxed{(1+\tfrac{1}{n})^n < e < (1+\tfrac{1}{n})^{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{e^n n!}{n^n}}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1\quad (n=1,2,\cdots)$$

故 $\quad u_n>u_{n-1}>\cdots>u_1=e$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, 这说明级数(1) 发散.

(2) 因

$$\frac{1}{n^3+3n^2+2n}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\,\frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\qquad(n=1,2,\cdots)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3+3k^2+2k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

进行拆项相消

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{4}$, 这说明原级数收敛 , 其和为 $\frac{1}{4}$.

(3) $S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$

$$S_n - \tfrac{1}{2} S_n$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$\therefore \quad S_n = 3 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n}, \text{ 故 } \lim_{n \to \infty} S_n = 3$$

这说明原级数收敛, 其和为 3 .

*四、柯西审敛原理

定理. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$时, 对任意 $p \in \mathbf{N}_+$, 有

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right| < \varepsilon$$

证: 设所给级数部分和数列为 $S_n (n = 1, 2, \cdots)$, 因为

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right| = \left| S_{n+p} - S_n \right| < \varepsilon$$

所以利用数列 $S_n (n = 1, 2, \cdots)$ 的柯西审敛原理

即得本定理的结论.

例6. 利用柯西审敛原理判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的敛散性.

解: 对任意 $p \in \mathbf{N}_+$, 有

$$
\begin{aligned}
&\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right| \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
&< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

$\therefore \forall \varepsilon > 0$, 取 $N \geq [\frac{1}{\varepsilon}]$, 当 $n > N$时，对任意 $p \in \mathbf{N}_+$, 都有

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

由柯西审敛原理可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.