第二节
常数项级数的审敛法

一、正项级数及其审敛法

二、交错级数及其审敛法

三、绝对收敛与条件收敛

*四、绝对收敛级数的性质

一、正项级数及其审敛法

若 $u_n \ge 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数 .

定理 1. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和序列 S_n $(n=1,2,\cdots)$ 有界 .

证: “$\Longrightarrow$” 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 , 则$\{S_n\}$收敛, 故有界.

“$\Longleftarrow$” $\because u_n \ge 0$, $\therefore$ 部分和数列 $\{S_n\}$单调递增,

又已知 $\{S_n\}$ 有界, 故$\{S_n\}$ 收敛 , 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

定理2 (比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数, 且存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 对一切 $n > N$, 有 $u_n \le k v_n$ (常数 $k > 0$),

(1) 若强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证: 因在级数前加、减有限项不改变其敛散性, 故不妨设对一切 $n \in \mathbf{N}_+$, 都有 $u_n \le k v_n$,

令 S_n 和 σ_n 分别表示弱级数和强级数的部分和, 则有

$$S_n \le k\sigma_n$$

(1) 若强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则有 $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$

因此对一切 $n \in \mathbf{N}_+$, 有 $S_n \le k\sigma$

由定理 1 可知, 弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛 .

(2) 若弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则有 $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$,

因此 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$, 这说明强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散 .

例**1.** 讨论 p 级数 $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$ (常数 $p>0$) 的敛散性.

解: 1) 若 $p\le 1$, 因为对一切 $n\in\mathbf{N}_+$,

$$\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 由比较审敛法可知 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散.

2) 若 $p>1$, 因为当 $n-1\le x\le n$ 时, $\dfrac{1}{n^p}\le\dfrac{1}{x^p}$, 故

$$\frac{1}{n^p}=\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^p}\,\mathrm{d}x$$

$$\le\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]$$

$$\left[1-\frac{1}{2^{p-1}}\right]+\left[\frac{1}{2^{p-1}}-\frac{1}{3^{p-1}}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{n^{p-1}}-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right]$$

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k^{p-1}}-\frac{1}{(k+1)^{p-1}}\right]=1-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

故强级数收敛, 由比较审敛法知 p 级数收敛 .

调和级数与 p 级数是两个常用的比较级数.

若存在 $N\in\mathbf{N}_+$, 对一切 $n\geq N$,

$$(1)\quad u_n\geq\frac{1}{n},\ \text{则}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ \text{发散};$$

$$(2)\quad u_n\leq\frac{1}{n^p}\ \ (p>1),\ \text{则}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ \text{收敛}.$$

例2. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散 .

证: 因为

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散

根据比较审敛法可知, 所给级数发散 .

定理3. (比较审敛法的极限形式) 设两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$, 则有

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时，两个级数同时收敛或发散；

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l = \infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

证: 据极限定义, 对 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon \qquad (l \neq \infty)$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$(l-\varepsilon)v_n \le u_n \le (l+\varepsilon)v_n \qquad (n>N)$$

(1) 当$0<l<\infty$时，取$\varepsilon<l$,由定理 2 可知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 同时收敛或同时发散；

(2) 当$l=0$时，利用 $u_n<(l+\varepsilon)v_n$ $(n>N)$,由定理2 知 若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛；

(3) 当$l=\infty$时，存在$N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，$\dfrac{u_n}{v_n}>1$，即

$$u_n>v_n$$

由定理2可知，若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也发散.

$\sum u_n, \sum v_n$ 是两个正项级数，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$,

(1) 当 $0<l<\infty$ 时，两个级数同时收敛或发散；

(2) 当 $l=0$ 且 $\sum v_n$ 收敛时，$\sum u_n$ 也收敛；

(3) 当 $l=\infty$ 且 $\sum v_n$ 发散时，$\sum u_n$ 也发散 .

注:

1) u_n, v_n 均为无穷小时，l 的值反映了它们不同阶的比较.

2) 特别取 $v_n=\dfrac{1}{n^p}$，对正项级数 $\sum u_n$，可得如下结论：

$$\lim_{n\to\infty} n^p u_n = l \begin{cases} p\le 1,\ 0<l\le\infty \Longrightarrow \sum u_n \text{ 发散} \\ p>1,\ 0\le l<\infty \Longrightarrow \sum u_n \text{ 收敛} \end{cases}$$

例3. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 的敛散性 .

$\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$

解: $\because \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n}=1$

根据比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散.

例4. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{1}{n^2}]$ 的敛散性.

$\ln(1+\frac{1}{n^2})\sim\frac{1}{n^2}$

解: $\because \lim_{n\to\infty} n^2\ln[1+\frac{1}{n^2}]=\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\frac{1}{n^2}=1$

根据比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{1}{n^2}]$ 收敛.

定理4 . 比值审敛法 (D’alembert 判别法)

设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, 则

(1) 当 $\rho<1$ 时, 级数收敛 ;

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$ 时, 级数发散 .

证: (1) 当 $\rho<1$ 时, 取 ε 使 $\rho+\varepsilon<1$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$ 知

存在 $N\in\mathrm{N}_+$, 当 $n>N$ 时, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon<1$

$$\therefore\ u_{n+1}<(\rho+\varepsilon)u_n<(\rho+\varepsilon)^2u_{n-1}<\cdots$$

$$<(\rho+\varepsilon)^{n-N}u_{N+1}$$

$\sum(\rho+\varepsilon)^k$ 收敛 , 由比较审敛法可知 $\sum u_n$ 收敛.

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$时, 必存在$N\in \mathrm{N}_+$, $u_N\neq 0$, 当$n\geq N$时 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$, 从而

$$u_{n+1}>u_n>u_{n-1}>\cdots>u_N$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \geq u_N \neq 0$, 所以级数发散.

说明: 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$ 时, 级数可能收敛也可能发散.

例如, p – 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}=1$

但 $\begin{cases} p>1, \text{级数收敛}; \\ p\leq 1, \text{级数发散}. \end{cases}$

例5. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\ (x>0)$ 的敛散性 .

解: $\because \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,x^n}{n\,x^{n-1}} = x$

根据定理4可知:

当$0<x<1$时, 级数收敛 ;

当$x>1$时, 级数发散 ;

当$x=1$时, 级数$\sum_{n=1}^{\infty} n$发散.

目录 上页 下页 返回 结束

***定理5.** 根值审敛法 (Cauchy判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则

(1) 当 $\rho < 1$ 时, 级数收敛;

(2) 当 $\rho > 1$ 时, 级数发散 .

证明提示: $\because \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, $\therefore$ 对任意给定的正数 ε $(\varepsilon < |1-\rho|)$, 存在 $N \in \mathrm{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\rho - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \rho + \varepsilon$$

即

$$(\rho - \varepsilon)^n < u_n < (\rho + \varepsilon)^n$$

$\rho < 1 \Longrightarrow \rho + \varepsilon < 1$

$\rho > 1 \Longrightarrow \rho - \varepsilon > 1$

分别利用上述不等式的左,右部分, 可推出结论正确.

说明：

$\rho = 1$ 时，级数可能收敛也可能发散．

例如，$p-$ 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$：

$$u_n = \frac{1}{n^p}, \quad \sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p \to 1 \ (n \to \infty)$$

但 $\begin{cases} p > 1, \text{级数收敛；} \\ p \le 1, \text{级数发散．} \end{cases}$

例6. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ 收敛于S，并估计以部分和 S_n 近似代替和 S时所产生的误差 .

解：$\because\ \sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\frac{1}{n}\to 0\ \ (n\to\infty)$

由定理5可知该级数收敛 . 令 $r_n=S-S_n$，则所求误差为

$$0<r_n=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)^{n+2}}+\cdots$$

$$<\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\frac{1}{(n+1)^{n+2}}+\cdots$$

$$=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)^n}$$

二、交错级数及其审敛法

设 $u_n > 0, n = 1, 2, \cdots,$ 则各项符号正负相间的级数

$$u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots$$

称为交错级数 .

定理6 . (Leibnitz 判别法) 若交错级数满足条件:

1) $u_n \ge u_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots);$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛 , 且其和 $S \le u_1,$ 其余项满足

$$|r_n| \le u_{n+1} \, .$$

证： $\because S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}) \geq 0$

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1})$$
$$- u_{2n} \leq u_1$$

$\therefore S_{2n}$ 是单调递增有界数列，故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \leq u_1$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$

故级数收敛于S, 且 $S \leq u_1$, S_n 的余项:

$$r_n = S - S_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots)$$

$$\therefore \quad |r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots \leq u_{n+1}$$

用Leibnitz 判别法判别下列级数的敛散性:

1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$ 收敛

2) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}+\cdots$ 收敛

3) $\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}-\frac{4}{10^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}+\cdots$ 收敛

上述级数各项取绝对值后所成的级数是否收敛？

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$.

发散 收敛 收敛

三、绝对收敛与条件收敛

定义: 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛;

若原级数收敛, 但取绝对值以后的级数发散, 则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

例如: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 为条件收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{10^n}$ 均为绝对收敛.

定理7. 绝对收敛的级数一定收敛 .

证：设 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 , 令

$$v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)\quad(n=1,2,\cdots)$$

显然 $v_n\ge 0$, 且 $v_n\le|u_n|$, 根据比较审敛法 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,

$$u_n=2v_n-|u_n|$$

$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}2v_n$ 收敛

$\downarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛

例7. 证明下列级数绝对收敛：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}; \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{\mathrm{e}^n}.$$

证: (1) $\because \left|\dfrac{\sin n\alpha}{n^4}\right| \le \dfrac{1}{n^4}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$ 收敛,

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right| \text{ 收敛}$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha}{n^4}$ 绝对收敛 .

$$\boxed{(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{\mathrm{e}^n}}$$

(2) 令 $u_n=\dfrac{n^2}{\mathrm{e}^n}$,

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^2}{\mathrm{e}^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{\mathrm{e}^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{\mathrm{e}}<1$$

$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{n^2}{\mathrm{e}^n}\right|$ 收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2}{\mathrm{e}^n}$ 绝对收敛.

*四、绝对收敛级数的性质

绝对收敛级数与条件收敛级数具有完全不同的性质.

***定理8.** 绝对收敛级数不因改变项的位置而改变其和.

(P263 定理9)

***定理9.** (绝对收敛级数的乘法)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都绝对收敛, 其和分别为 S, σ,

则对所有乘积 $u_i v_j$ 按任意顺序排列得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$

也绝对收敛, 其和为 $S\sigma$. (P265 定理10)

(证明见 P263～P266)

说明: 绝对收敛级数有类似有限项和的性质,

但条件收敛级数不具有这两条性质.