第八节
一般周期的函数的傅里叶级数

一、周期为 $2\,l$ 的周期函数的傅里叶级数

二、傅里叶级数的复数形式

一、周期为$2l$的周期函数的傅里叶级数

周期为 $2l$ 的函数 $f(x)$

⇓ 变量代换 $z=\dfrac{\pi x}{l}$

周期为 2π 的函数 $F(z)$

⇓ 将$F(z)$ 作傅氏展开

$f(x)$ 的傅氏展开式

定理. 设周期为$2l$的周期函数$f(x)$满足收敛定理条件，则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

(在$f(x)$的连续点处)

其中

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

证明: 令 $z=\frac{\pi x}{l}$, 则 $x\in[-l,l]$ 变成 $z\in[-\pi,\pi]$,

令 $F(z)=f(x)=f(\frac{lz}{\pi})$, 则

$$F(z+2\pi)=f(\frac{l(z+2\pi)}{\pi})=f(\frac{lz}{\pi}+2l)$$

$$=f(\frac{lz}{\pi})=F(z)$$

所以$F(z)$是以2π为周期的周期函数, 且它满足收敛定理条件, 将它展成傅里叶级数:

$$F(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz+b_n\sin nz)$$

(在 $F(z)$ 的连续点处)

其中 $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(z)\cos nz\,\mathrm{d}z & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(z)\sin nz\,\mathrm{d}z & (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$

↓ 令 $z = \dfrac{\pi x}{l}$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

(在 $f(x)$ 的 连续点处) 证毕

说明: 如果 $f(x)$ 为奇函数, 则有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \quad (\text{在 } f(x) \text{ 的连续点处})$$

其中 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots)$

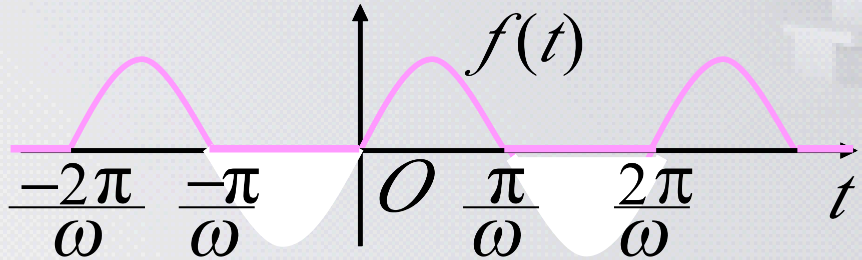
如果 $f(x)$ 为偶函数, 则有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \quad (\text{在 } f(x) \text{ 的连续点处})$$

其中 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots)$

注: 无论哪种情况, 在 $f(x)$ 的间断点 x 处, 傅里叶级数都收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

例1. 交流电压 $E(t)=E\sin\omega t$ 经半波整流后负压消失，试求半波整流函数的傅里叶级数.



解: 这个半波整流函数的周期是 $\frac{2\pi}{\omega}$，它在 $[\frac{-\pi}{\omega},\frac{\pi}{\omega}]$ 上的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}0, & \frac{-\pi}{\omega}\le t<0\\ E\sin\omega t, & 0\le t<\frac{\pi}{\omega}\end{cases}$$

$$\therefore a_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}E\sin\omega t\cos n\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}[\sin(n+1)\omega t-\sin(n-1)\omega t]\,\mathrm{d}t$$

$$a_1=\frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin 2\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{E\omega}{2\pi}\left[-\frac{1}{2\omega}\cos 2\omega t\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}}=0$$

$n\neq 1$时

$$a_n=\frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}[\sin(n+1)\omega t-\sin(n-1)\omega t]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E\omega}{2\pi}\left[-\frac{1}{(n+1)\omega}\cos(n+1)\omega t+\frac{1}{(n-1)\omega}\cos(n-1)\omega t\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=\frac{E}{2\pi}\left[\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{n-1}\right]$$

$$=\frac{[(-1)^{n-1}-1]E}{(n^2-1)\pi}=\begin{cases}0, & n=2k+3\\ \frac{2E}{(1-4k^2)\pi}, & n=2k\end{cases}\quad(k=0,1,\cdots)$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E\sin\omega t\cdot\sin n\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [\cos(n-1)\omega t - \cos(n+1)\omega t]\,\mathrm{d}t$$

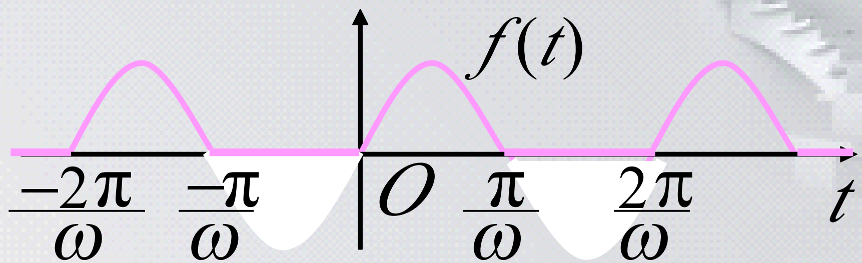
$$b_1 = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E\sin\omega t\cdot\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (1-\cos 2\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{E\omega}{2\pi}\left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{E}{2}$$

$n > 1$ 时

$$b_n = \frac{E\omega}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-1)\omega t}{(n-1)\omega} - \frac{\sin(n+1)\omega t}{(n+1)\omega}\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = 0$$

由于半波整流函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 由收敛定理可得



$$f(t)=\frac{E}{\pi}+\frac{E}{2}\sin\omega t+\frac{2E}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-4k^2}\cos 2k\omega t$$

直流部分　　交流部分　　$(-\infty<t<+\infty)$

说明： 上述级数可分解为直流部分与交流部分的和.

$2k$ 次谐波的振幅为 $A_k=\frac{2E}{\pi}\frac{1}{4k^2-1}$, k 越大振幅越小,

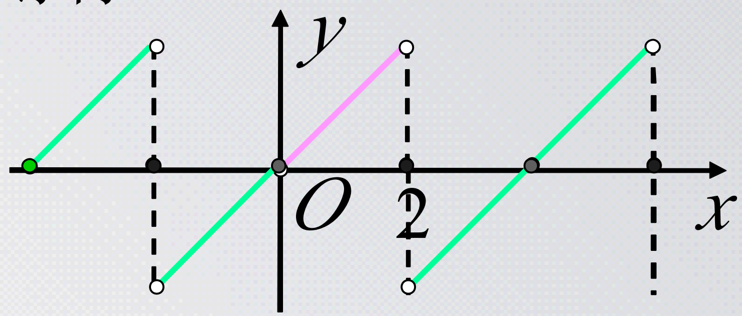
因此在实际应用中展开式取前几项就足以逼近 $f(x)$ 了.

例2. 把 $f(x)=x\ (0<x<2)$ 展开成

(1) 正弦级数;　　(2) 余弦级数.

在 $x=2k$ 处级数收敛于何值?

解: (1) 将 $f(x)$ 作奇周期延拓, 则有



$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

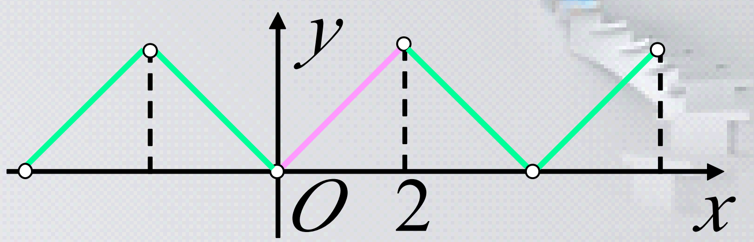
$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}+\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi=\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}\qquad(0<x<2)$$

(2) 将 $f(x)$ 作偶周期延拓, 则有



$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = 2$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x \cdot \cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= -\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n = 2k-1 \end{cases}$$

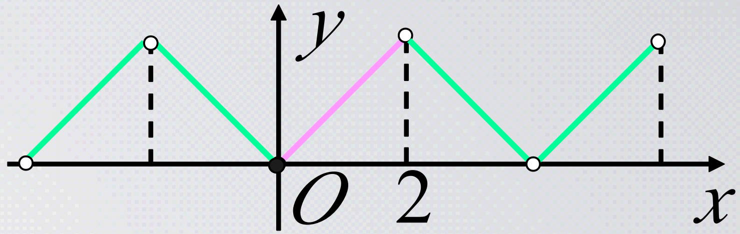
$$(k = 1, 2, \cdots)$$

$$\therefore\ f(x) = x = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}$$

$$(0 < x < 2)$$

$$f(x)=x=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}\quad(0<x<2)$$

说明: 此式对 $x=0$ 也成立,



据此有 $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

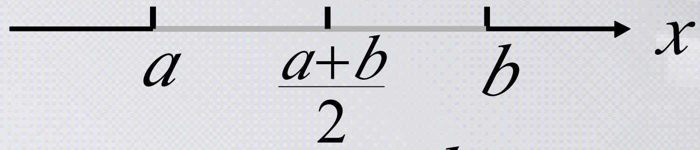
由此还可导出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\therefore\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

当函数定义在任意有限区间上时, 其展开方法为:

方法1 $f(x)$, $x \in [a,b]$



↓ 令 $x = z + \frac{b+a}{2}$, 即 $z = x - \frac{b+a}{2}$

$$F(z) = f(x) = f(z + \frac{b+a}{2}),\ z \in [-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}]$$

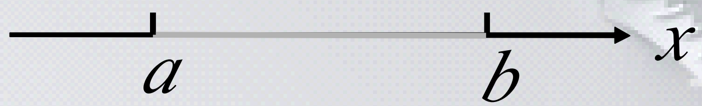
↓ 周期延拓

$F(z)$ 在 $[-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}]$ 上展成傅里叶级数

↓ 将 $z = x - \frac{b+a}{2}$ 代入展开式

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的傅里叶级数

方法**2** $f(x)$, $x \in [a,b]$



↓ 令 $x = z + a$, 即 $z = x - a$

$$F(z) = f(x) = f(z+a), \quad z \in [0, b-a]$$

↓ 奇或偶式周期延拓

$F(z)$ 在 $[0, b-a]$ 上展成正弦或余弦级数

↓ 将 $z = x - a$ 代入展开式

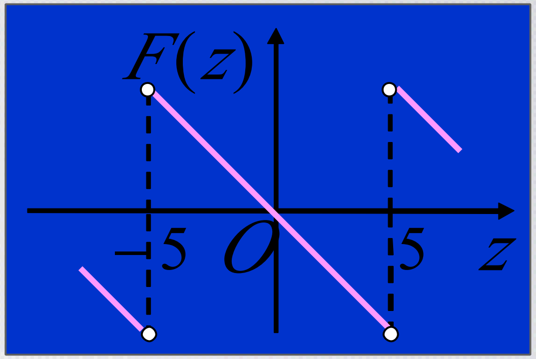
$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的正弦或余弦级数

例**3.** 将函数 $f(x)=10-x\,(5<x<15)$ 展成傅里叶级数.

解: 令 $z=x-10$, 设

$$F(z)=f(x)=f(z+10)=-z\qquad(-5<z<5)$$

将 $F(z)$ 延拓成周期为 10 的周期函数, 则它满足收敛定理条件. 由于 $F(z)$ 是奇函数, 故



$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{5}\int_0^5 -z\sin\frac{n\pi z}{5}\,\mathrm{d}z=(-1)^n\frac{10}{n\pi}$$

$(n=1,2,\cdots)$

$$F(z)=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi z}{5}\qquad(-5<z<5)$$

$$\therefore\ 10-x=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}\qquad(5<x<15)$$

二、傅里叶级数的复数形式

设 $f(x)$是周期为 $2\,l$的周期函数，则

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

利用欧拉公式

$$\begin{cases}\cos\dfrac{n\pi x}{l}=\dfrac{1}{2}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}+e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)\\[2ex] \sin\dfrac{n\pi x}{l}=\dfrac{-i}{2}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}-e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}+e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)-\frac{i b_n}{2}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}-e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)\right]$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-i b_n}{2}e^{i\frac{n\pi x}{l}}+\frac{a_n+i b_n}{2}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)$$

c_0 ← $\frac{a_0}{2}$；c_n ← $\frac{a_n-i b_n}{2}$；c_{-n} ← $\frac{a_n+i b_n}{2}$

注意到 $c_0=\dfrac{a_0}{2}=\dfrac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\,\mathrm{d}x$

$$c_n=\frac{a_n-\mathrm{i}\,b_n}{2}=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}\,x-\frac{\mathrm{i}}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}\,x\Big]$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\Big(\underline{\cos\frac{n\pi x}{l}-\mathrm{i}\,\sin\frac{n\pi x}{l}}\Big)\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}}\,\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots)$$

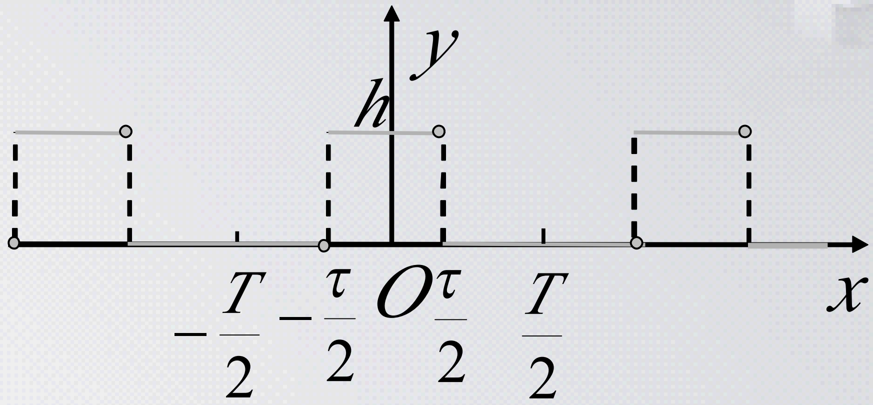
同理 $c_{-n}=\dfrac{a_n+\mathrm{i}\,b_n}{2}=\dfrac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}}\,\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots)$

因此得 傅里叶级数的复数形式:

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi x}{T}} \\ c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi x}{T}}\,\mathrm{d}x \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \end{cases}$$

例4. 把宽为 τ ,高为 h ,周期为 T 的矩形波展成复数形式的傅里叶级数 .

解: 在一个周期 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 内矩形波的函数表达式为



$$u(t)=\begin{cases} h, & -\frac{\tau}{2}\le t<\frac{\tau}{2} \\ 0, & -\frac{T}{2}\le t<-\frac{\tau}{2},\ \frac{\tau}{2}\le t<\frac{T}{2} \end{cases}$$

它的复数形式的傅里叶系数为

$$c_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\,\mathrm{d}\,t=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} h\,\mathrm{d}\,t=\frac{h\tau}{T}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi t}{T}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} h\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi t}{T}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{h}{T}\left[-\frac{T}{2n\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi t}{T}}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{h}{n\pi}\cdot\frac{-1}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi\tau}{T}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi\tau}{T}}\right]$$

$$= \frac{h}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T} \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$\therefore\ u(t) = \frac{h\tau}{T} + \frac{h}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi t}{T}}$$

$$(t \neq \pm\frac{\tau}{2} + kT,\ k = 0, \pm 1, \cdots)$$