第三节 复合函数与反函数

一、复合函数

二、反函数

三、函数的运算

四、初等函数

一、复合函数

设 $y=\sqrt{u}$, $u=1-x^2$, $\Longrightarrow$ $y=\sqrt{1-x^2}$

定义：设有函数 f 和 g，$D_f \cap R_g \neq \Phi$，则称定义在

$$\{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

上的函数 $f \circ g$ 为 f 和 g 的 **复合函数**，其中

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

$x \rightarrow$ 自变量，$u \rightarrow$ 中间变量，$y \rightarrow$ 因变量

例1　$u = g(x) = 2 + x^2$，$y = f(u) = \ln u$,

则 $R_g = [2,+\infty) \subset D_f$,

因此能够形成复合函数

$$f \circ g(x) = \ln(2 + x^2)$$

注意: 1.不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的;

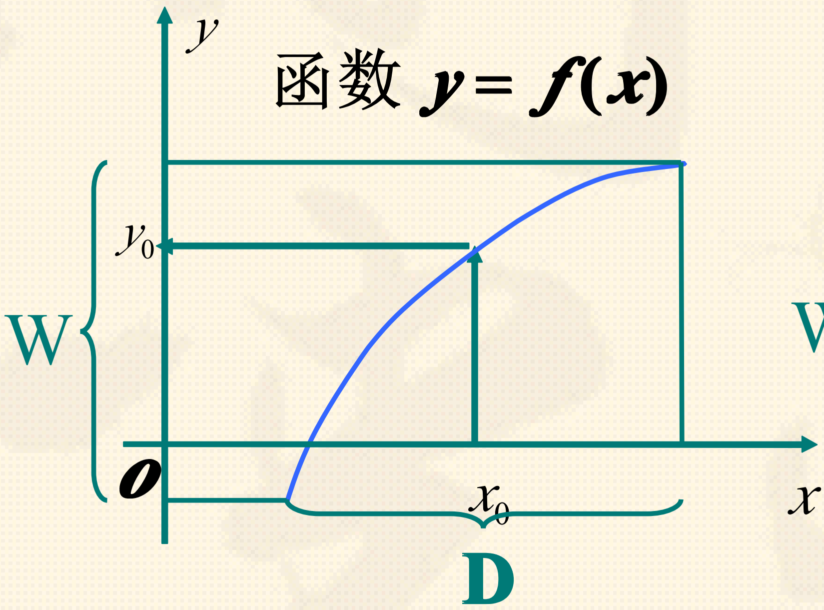
例如 $y = \arcsin u$, $u = 2 + x^2$; $y \neq \arcsin(2 + x^2)$

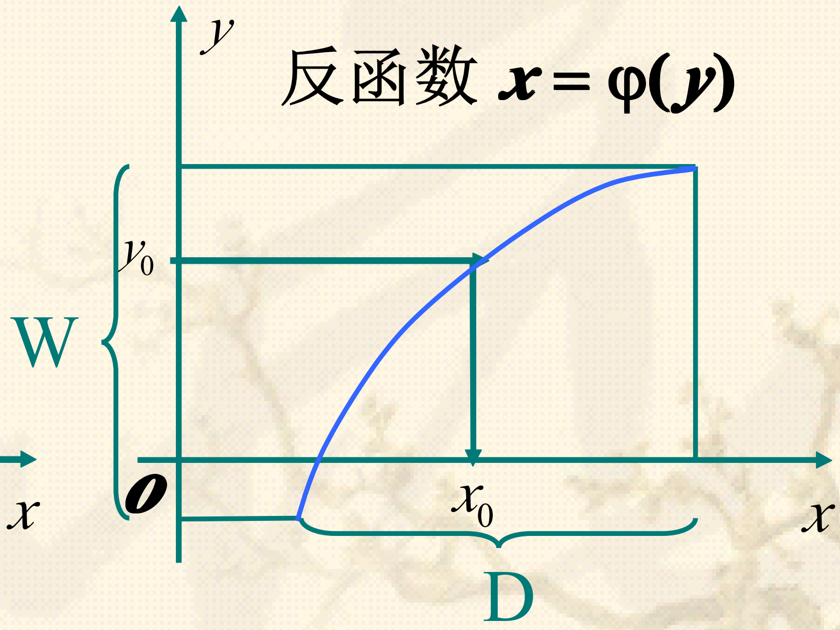
2.复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

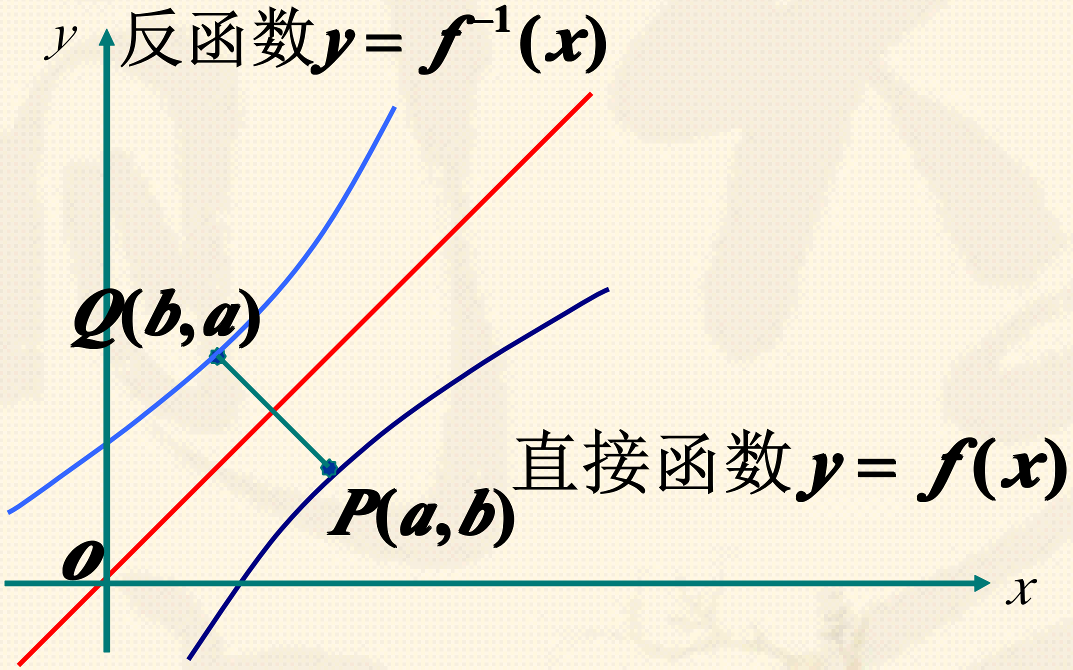
例如 $y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}$, $y = \sqrt{u}$, $u = \cot v$, $v = \frac{x}{2}$.

二、反函数

设函数 $f:D\to f(D)$ 是单射，则它存在逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$，称此映射 f^{-1} 为函数 f 的 **反函数**.







直接函数与反函数的图形关于直线 $y = x$ 对称.

定理（反函数存在定理）：单调函数 f 必存在单调的反函数，且此反函数与 f 具有相同的单调性.

例2　求函数 $y=\sqrt{e^x+1}$ 的反函数．

解 $\because e^x = y^2 - 1$

$\therefore x = \ln(y^2 - 1)$

$y=\sqrt{e^x+1}>1$，即原函数的值域为 $(1,+\infty)$

$\therefore$ 反函数为 $y=\ln(x^2-1)$

$$D_{f^{-1}} = (1,+\infty)$$

三、函数的运算

设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域分别是 D_1、D_2，$D = D_1 \cap D_2 \neq \Phi$，则我们可以定义这两个函数的下列运算：

函数的和（差） $f \pm g$

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad x \in D$$

函数的积 $f \cdot g$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad x \in D$$

函数的商 $\dfrac{f}{g}$ $\quad \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$x \in D \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$$

例3　设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-l,l)$，证明必定存在 $(-l,l)$ 上的偶函数 $g(x)$ 及奇函数 $h(x)$，使得

$$f(x)=g(x)+h(x).$$

分析　如果这样的 $g(x)$ 和 $h(x)$ 存在，于是有

$$\begin{cases} f(x)=g(x)+h(x) \\ f(-x)=g(-x)+h(-x)=g(x)-h(x) \end{cases}$$

证明

$$设 \begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \\ h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \end{cases}$$

显然 $f(x) = g(x) + h(x)$.

$$g(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = g(x) \text{ 是偶函数},$$

$$h(x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = h(-x) \text{ 是奇函数}.$$

四、初等函数

1. **幂函数：** $y = x^{\mu}$ （μ 是常数）

2. **指数函数：** $y = a^{x}$ （a 是常数，$a > 0, a \neq 1$）

3. **对数函数：** $y = \log_a x$ （a 是常数，$a > 0, a \neq 1$）

4. **三角函数：** $y = \sin x,\ y = \cos x,$

   $y = \tan x,\ y = \cot x$

5. **反三角函数：** $y = \arcsin x,\ y = \arccos x,$

   $y = \arctan x,\ y = \operatorname{arccot} x$

由常数及基本初等函数经过有限次的复合步骤所构成并且可以用一个式子表示的函数，叫作**初等函数**.

例如

$$y=\sqrt{1-x^2} \qquad y=\sin^2 x$$

$$y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}} \qquad y=\sin\frac{1}{x}$$