第二节　函数的极限

一、函数极限的定义

二、函数极限的性质

一、函数极限的定义

在自变量的某个变化过程中，如果对应的函数值无限接近于某个确定的常数，那么这个确定的数叫做自变量在这一变化过程中函数的极限。

下面，我们将主要研究以下两种情形：

(1)自变量 x 任意接近于有限值 x_0 $(x \to x_0)$,对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形；

(2)自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大 $(x \to \infty)$,对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形；

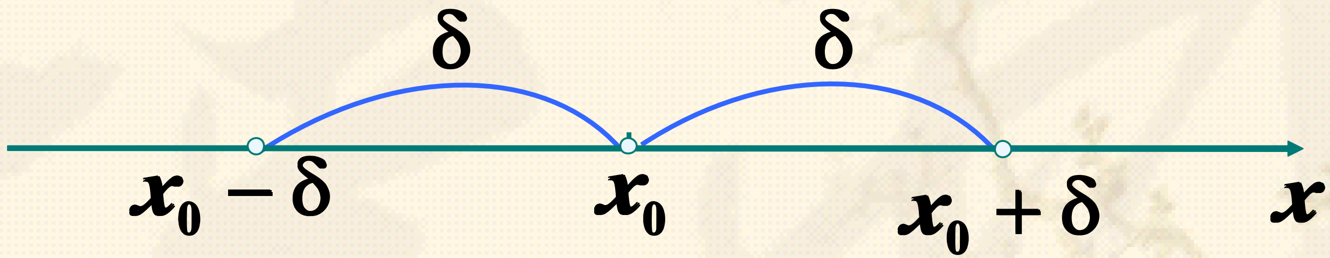
1. 自变量趋于有限值时函数的极限

问题:函数   在   的过程中,对应

函数值   无限趋近于确定值 A.

$|f(x)-A|<\varepsilon$ 表示 $|f(x)-A|$ 任意小;

$0<|x-x_0|<\delta$ 表示 $x\to x_0$ 的过程.



点 x_0 的去心 δ 邻域, δ 体现 x 接近 x_0 程度.

①定义 1 δ 设函数 x 在点 的某一去心邻域内有定义，对于任意给定的正数 （不论它多么 $f(x)$

小），总存在正数 $A| < \varepsilon$ ，使得当 A 满足不等式

$_0$ 时的极限 时，对应的函数值 都满足

不等式 或 $f(x) \to A$（当 $x \to x_0$），那么常数 就叫函数 ，记作

$$\text{"}\varepsilon-\delta\text{"定义} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{使当} 0 < |x - x_0| < \delta \text{时},$$

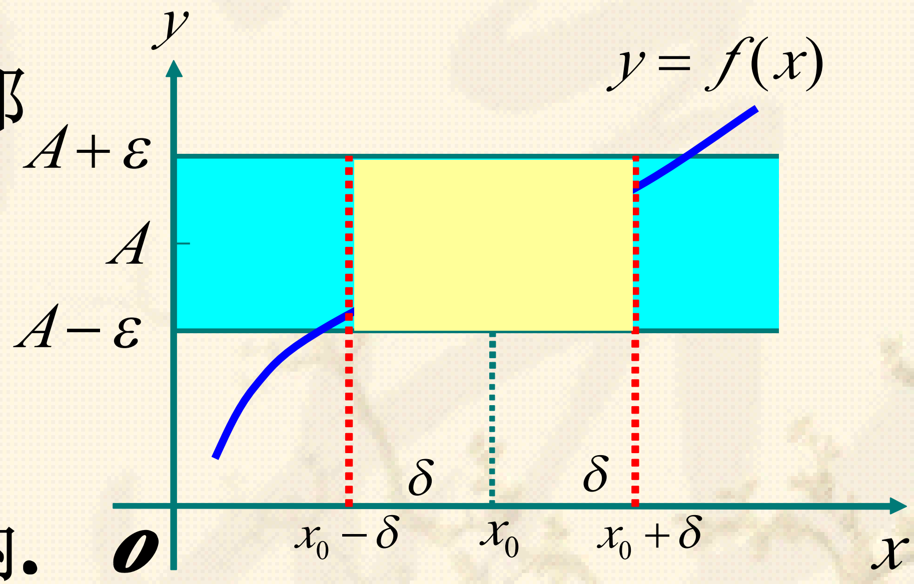
$$\text{恒有} |f(x) - A| < \varepsilon.$$

注意：1.函数极限与$f(x)$在点x_0是否有定义无关；

2.δ与任意给定的正数ε有关.

②几何解释:

当x在x_0的去心δ邻域时,函数$y=f(x)$图形完全落在以直线$y=A$为中心线,宽为2ε的带形区域内.



显然,δ并不唯一,也不需要取到最大的δ.

例2 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} C = C, (C为常数).$

证 任给$\varepsilon > 0$, 任取$\delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$时,

$|f(x) - A| = |C - C| = 0 < \varepsilon$成立, $\therefore \lim\limits_{x\to x_0} C = C.$

例3 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0.$

证 $\because |f(x) - A| = |x - x_0|$, 任给$\varepsilon > 0$, 取$\delta = \varepsilon$,

当$0 < |x - x_0| < \delta = \varepsilon$时,

$|f(x) - A| = |x - x_0| < \varepsilon$成立, $\therefore \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0.$

例4 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2.$

证 函数在点$x=1$处没有定义.

$\because \left|f(x)-A\right|=\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|=\left|x-1\right|$ 任给$\varepsilon>0,$

要使$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon,$ 只要取$\delta=\varepsilon,$

当$0<\left|x-x_0\right|<\delta$时，就有$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon,$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2.$

例5 证明：当$x_0>0$时，$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

证 $\because \left|f(x)-A\right|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\left|\dfrac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|\le\dfrac{\left|x-x_0\right|}{\sqrt{x_0}}$,

任给$\varepsilon>0$，要使$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$,

只要$\left|x-x_0\right|<\sqrt{x_0}\varepsilon$且$x$不取负值.取$\delta=\min\{x_0,\sqrt{x_0}\varepsilon\}$,

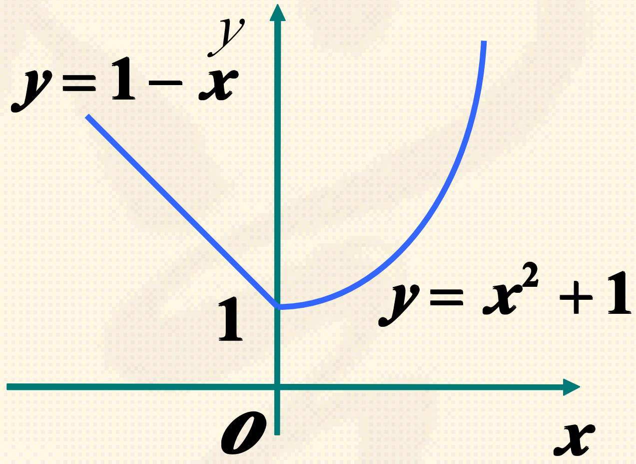
当$0<\left|x-x_0\right|<\delta$时，就有$\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|<\varepsilon$,

$$\therefore \lim_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}.$$

2.单侧极限:

例如,

设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$



证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1.$

分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况分别讨论

x 从左侧无限趋近 x_0，记作 $x\to x_0^-$;

x 从右侧无限趋近 x_0，记作 $x\to x_0^+$;

左极限 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时,

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

记作 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0^-) = A$.

右极限 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时,

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

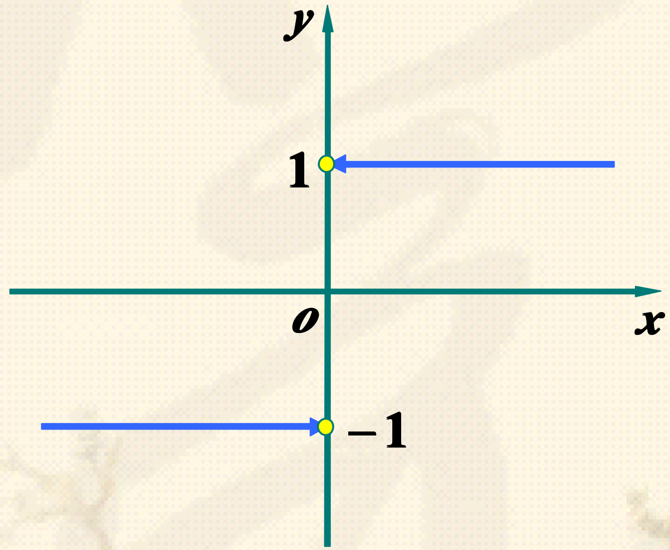
记作 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0^+) = A$.

注意 : $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$

$$= \{x \mid 0 < x - x_0 < \delta\} \cup \{x \mid -\delta < x - x_0 < 0\}$$

定理：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=A.$

例6 验证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.



证 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}$

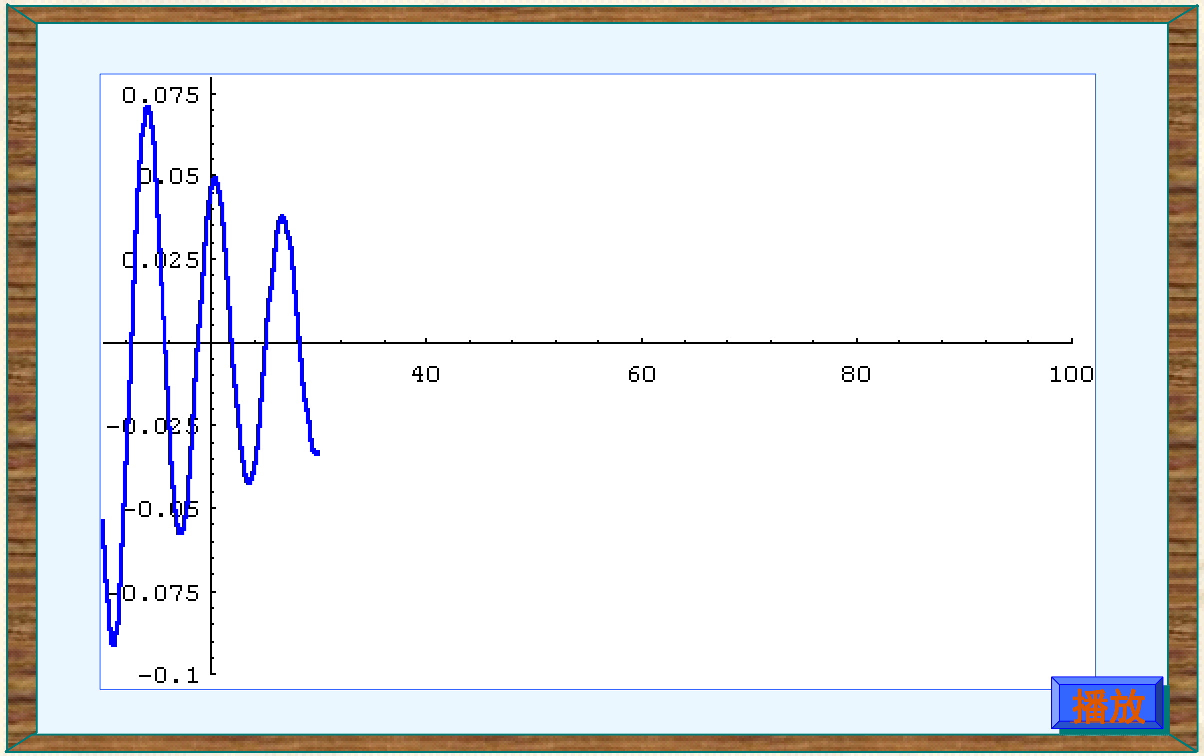
$=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$

左右极限存在但不相等，$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

3. 自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时的变化趋势.



问题: 函数 在 的<u>过程中</u>, 对应函数值 无限<u>趋近于</u>确定值 A.

通过上面演示实验的观察:

当 x 无限增大时, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 无限接近于 0.

问题: 如何用数学语言刻划函数"无限接近".

$|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;

$|x| > X$ 表示 $x \to \infty$ 的过程.

①**定义 2** 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 X，使得当 x 满足不等式 $|x|>X$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么常数 A 就叫函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当 x\to\infty)$$

$\boxed{"\varepsilon-X"定义}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,使当|x|>X时,恒有|f(x)-A|<\varepsilon.$$

2. 另两种情形:

$1^0.\ x \to +\infty$ 情形: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

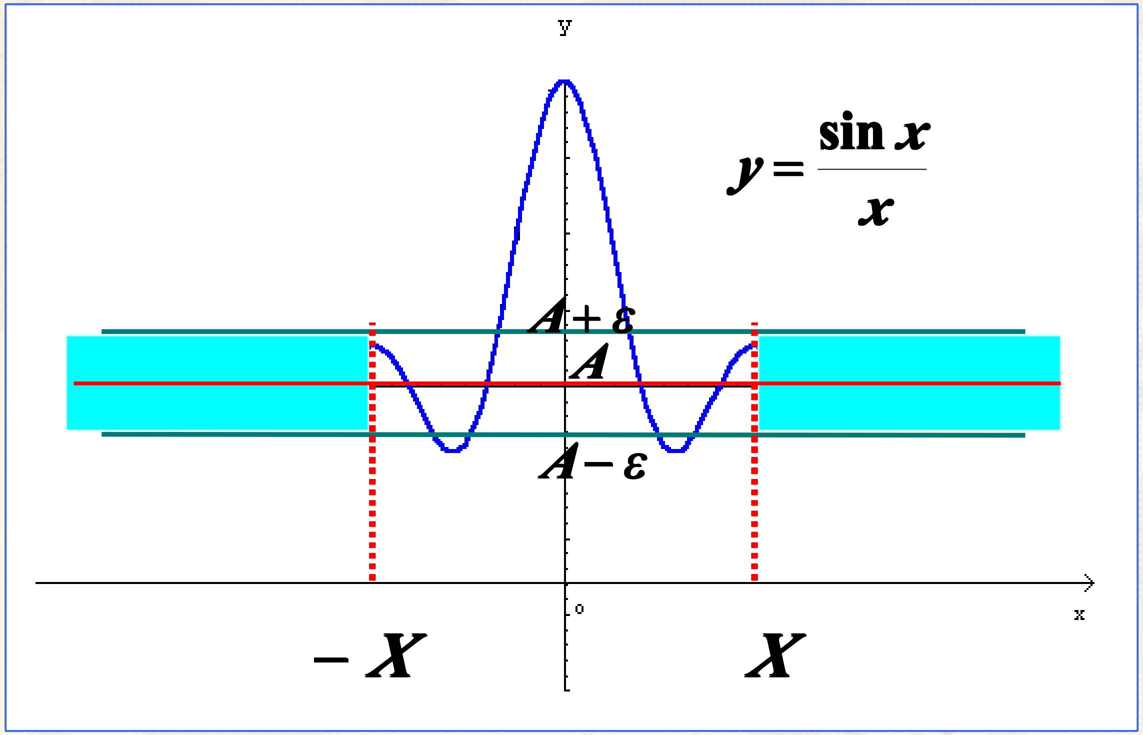
$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使当$x > X$时, 恒有$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$.

$2^0.\ x \to -\infty$ 情形: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使当$x < -X$时, 恒有$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$.

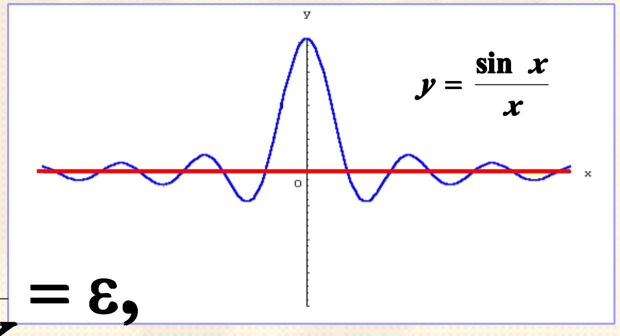
定理: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$且$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

3. 几何解释:



当$x<-X$或$x>X$时, 函数 $y=f(x)$图形完全落在以直线$y=A$为中心线，宽为2ε的带形区域内．

例1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$



证 $\because \left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|<\dfrac{1}{|x|}<\dfrac{1}{X}=\varepsilon,$

$\forall\varepsilon>0,$ 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon},$ 则当 $|x|>X$时恒有

$\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon,$ 故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

定义：如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$,则直线 $y=c$是函数$y=f(x)$的图形的水平渐近线.

二、函数极限的性质

定理1（函数极限的惟一性）

如果 $\lim\limits_{x \to x_0}$ 存在,则这个极限唯一.

定理2（函数极限的局部有界性）

如 果 $\lim\limits_{x \to}$ 存 在 ，那 么 存 在 常 数 ，使得当 时，有 .

定理3 (函数极限的局部保号性)

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,且$A>0$(或$A<0$),则存在常数$\delta>0$,

使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$).

定理3' 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq 0$,则存在 x_0 的某一去心

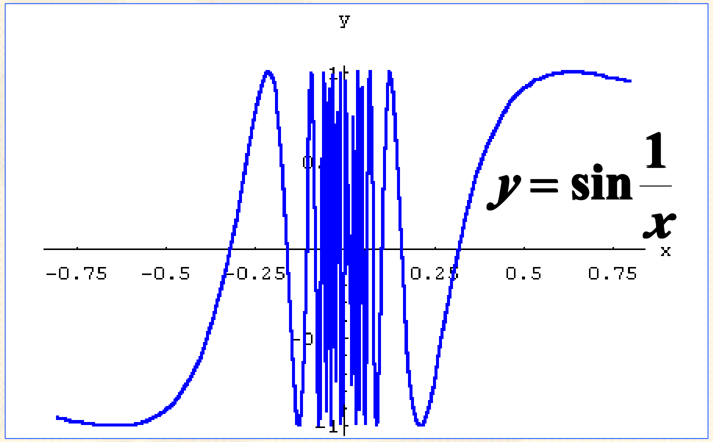
邻域 $\mathring{U}(x_0\ ,\delta)$,当 $x\in\mathring{U}(x_0\ ,\delta)$ 时,就有 $|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$.

推论 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,且$\exists\delta>0$,当$x\in\overset{0}{U}(x_0,\delta)$时,

$f(x)\geq 0$(或$f(x)\leq 0$),则$A\geq 0$(或$A\leq 0$).

例7 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

证 取 $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n\pi}\right\}$,



$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, 且 $x_n\neq 0$;

取 $\{x'_n\}=\left\{\dfrac{1}{\dfrac{4n+1}{2}\pi}\right\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n=0$, 且 $x'_n\neq 0$;

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi=0,$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x'_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{4n+1}{2}\pi$

$=\lim\limits_{n\to\infty}1=1,$

二者不相等， 故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.