

第四节 极限运算法则

- 一、极限运算法则
- 二、求极限方法举例



一、极限运算法则

定理 设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则

$$(1) \quad \lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B;$$

$$(2) \quad \lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B;$$

$$(3) \quad \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad \text{其中 } B \neq 0.$$

证 $\because \lim f(x) = A, \lim g(x) = B.$

$\therefore f(x) = A + \alpha, \quad g(x) = B + \beta.$ 其中 $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0.$

由无穷小运算法则,得



$[f(x) \pm g(x)] - (A \pm B) = \alpha \pm \beta \rightarrow 0. \therefore (1)$ 成立.

$$[f(x) \cdot g(x)] - (A \cdot B) = (A + \alpha)(B + \beta) - AB$$

$$= (A\beta + B\alpha) + \alpha\beta \rightarrow 0. \quad \therefore (2)$$
成立.

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A + \alpha}{B + \beta} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha - A\beta}{B(B + \beta)}$$

$$\therefore B\alpha - A\beta \rightarrow 0.$$

又 $\because \beta \rightarrow 0, B \neq 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|\beta| < \frac{|B|}{2}, \quad \therefore |B + \beta| \geq |B| - |\beta| > |B| - \frac{1}{2}|B| = \frac{1}{2}|B|$$



$\therefore |B(B + \beta)| > \frac{1}{2}B^2$, 故 $\left| \frac{1}{B(B + \beta)} \right| < \frac{2}{B^2}$, 有界,

\therefore (3)成立.

推论1 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 c 为常数, 则

$$\lim[cf(x)] = c \lim f(x).$$

常数因子可以提到极限记号外面.

推论2 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 n 是正整数, 则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$



二、求极限方法举例

例1 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 5}$.

解 $\because \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 3x + \lim_{x \rightarrow 2} 5$

$$= (\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5$$

$$= 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 3 \neq 0,$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - \lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5)} = \frac{2^3 - 1}{3} = \frac{7}{3}.$$



小结: 1. 设 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= a_0 (\lim_{x \rightarrow x_0} x)^n + a_1 (\lim_{x \rightarrow x_0} x)^{n-1} + \cdots + a_n \\ &= a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \cdots + a_n = f(x_0).\end{aligned}$$

2. 设 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, 且 $Q(x_0) \neq 0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0).$$

若 $Q(x_0) = 0$, 则商的法则不能应用 .



3. 设 $f(x)$ 为基本初等函数, 其定义域为 D ,
当 $x_0 \in D$ 时, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.



例2 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-1}{x^2+2x-3}$.

解 $\because \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+2x-3) = 0,$ 商的法则不能用

又 $\because \lim_{x \rightarrow 1} (4x-1) = 3 \neq 0,$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{4x-1} = \frac{0}{3} = 0.$$

由无穷小与无穷大的关系,得

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-1}{x^2+2x-3} = \infty.$$



例3 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$.

解 $x \rightarrow 1$ 时,分子,分母的极限都是零. ($\frac{0}{0}$ 型)

先约去不为零的无穷小因子 $x - 1$ 后再求极限.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{2}.$$

(消去零因子法)



例4 设 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2x - 3} = 2$, 求 a 、 b .

解 $x \rightarrow 1$ 时,分母的极限是零,而商的极限存在.

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b = 0.$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1+a)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1+a}{x+3} = \frac{2+a}{4} = 2.$$

故 $a = 6, b = -7$.



例5 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{7x^3 + 4x^2 - 1}$. ($\frac{\infty}{\infty}$ 型)

解 $x \rightarrow \infty$ 时, 分子, 分母的极限都是无穷大.

先用 x^3 去除分子分母, 分出无穷小, 再求极限.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{7x^3 + 4x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^3}}{7 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{2}{7}.$$

(无穷小因子分出法)



小结: 当 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$ 和 n 为非负整数时有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n = m, \\ 0, & \text{当 } n > m, \\ \infty, & \text{当 } n < m, \end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子、分母, 以分出无穷小, 然后再求极限。



例6 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{x+1} + ax + b \right) = 2$, 求 a 、 b .

解 左边 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2 + ax(x+1) + b(x+1)}{x+1}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+a)x^2 + (a+b)x + 2 + b}{x+1}$$

商的极限存在, 必须

$$1 + a = 0, \quad a + b = 2$$

解得 $a = -1, \quad b = 3$.



例7 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right)$.

解 $n \rightarrow \infty$ 时, 是无限多个无穷小之和 .

先变形再求极限.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} n(n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

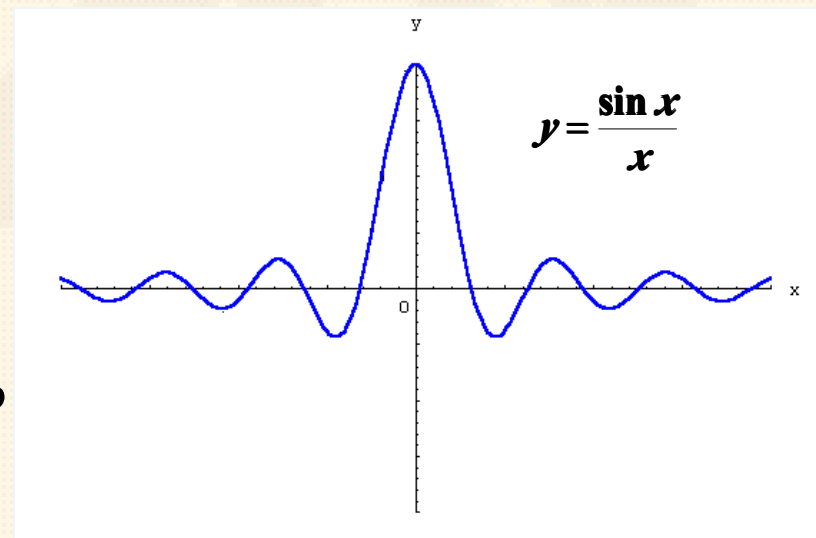


例8 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.

解 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 为无穷小,

而 $\sin x$ 是有界函数.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$



例9 设 $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 0 \\ x^2+1, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

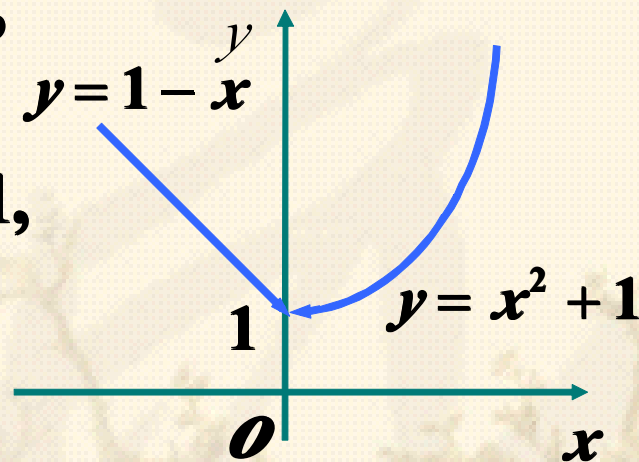
解 $x=0$ 是函数的分段点, 两个单侧极限为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1-x) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2+1) = 1,$$

左右极限存在且相等,

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$



定理（复合函数的极限 运算法则）设函数

$u = \varphi(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限存在且等于 a ,

即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a$, 而函数 $f(u)$ 在点 $u = a$ 有定义,

又 $\lim_{u \rightarrow a} f(u) = A$, 则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 当 $x \rightarrow x_0$

时的极限也存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \rightarrow a} f(u) = A$.

意义:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)]} \xrightarrow{\text{令 } u = \varphi(x)} \boxed{\lim_{u \rightarrow a} f(u)}$$
$$a = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$$



例8 求 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x-a}}$.

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)\sqrt[3]{(x-a)^2}}{(x-a)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2})}$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{(x-a)^2}}{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2})}$$
$$= \mathbf{0}.$$

