第六节　无穷小的等价代换

定理1 (等价无穷小代换定理)

设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

证 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim\left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha}\right)$

$$= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$.

解 当$x\to 0$时，$1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$, $\tan 2x \sim 2x$.

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2} = 8.$$

若未定式的分子或分母为若干个因子的乘积，则可对其中的任意一个或几个无穷小因子作等价无穷小代换，而不会改变原式的极限.

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}$.

解 当$x\to 0$时, $\sin x \sim x$, $\arcsin x \sim x$.

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)x}{x} = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1.$$

注意 不能滥用等价无穷小代换.

切记，只可对函数的因子作等价无穷小代换，

对于代数和中各无穷小不能分别代换.

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

错解 当$x\to 0$时，$\tan x\sim x$, $\sin x\sim x$.

$$\text{原式} \neq \lim_{x\to 0}\frac{x-x}{(2x)^3}=0.$$

解 当$x\to 0$时，$\sin 2x\sim 2x$,

$$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3,$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\frac{1}{16}.$$