第三节 高阶导数

一、高阶导数的定义

二、高阶导数的求导法则

一、高阶导数的定义

问题：变速直线运动的加速度.

设 $s=f(t)$，则瞬时速度为 $v(t)=f'(t)$

$\because$ 加速度 a 是速度 v 对时间 t 的变化率

$\therefore a(t)=v'(t)=[f'(t)]'.$

定义 如果函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在点 x 处可导，即

$$(f'(x))'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

存在，则称 $(f'(x))'$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 处的二阶导数.

记作 $f''(x), y'', \frac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$.

二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x),\ y''',\ \frac{d^3y}{dx^3}$.

三阶导数的导数称为四阶导数, $f^{(4)}(x),\ y^{(4)},\ \frac{d^4y}{dx^4}$.

一般地, 函数$f(x)$的$n-1$阶导数的导数称为函数$f(x)$的n阶导数,记作

$$f^{(n)}(x),\ y^{(n)},\ \frac{d^ny}{dx^n} \text{或} \frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

二阶和二阶以上的导数统称为**高阶导数.**

相应地, $f(x)$称为零阶导数; $f'(x)$称为一阶导数.

二、 高阶导数的求法法则

1. 直接法: 由高阶导数的定义逐步求高阶导数.

例1 设 $y=\arctan x$, 求 $f''(0), f'''(0)$.

解 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad y''=\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)'=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$$y'''=\left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)'=\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

$$\therefore f''(0)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\bigg|_{x=0}=0;\quad f'''(0)=\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\bigg|_{x=0}=-2.$$

例2 设 $y = x^{\alpha}\ (\alpha \in R)$, 求$y^{(n)}$.

解 $y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$y'' = (\alpha x^{\alpha-1})' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

$y''' = (\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2})' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$

……

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \qquad (n \geq 1)$$

若α为自然数n,则

$$y^{(n)} = (x^n)^{(n)} = n!, \qquad y^{(n+1)} = (n!)' = 0.$$

注意:求n阶导数时,求出1-3或4阶后,不要急于合并,分析结果的规律性,写出n阶导数.(可用数学归纳法证明)

例3 设 $y=\ln(1+x)$, 求$y^{(n)}$.

解 $y'=\dfrac{1}{1+x}$ $\qquad y''=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$y'''=\dfrac{2!}{(1+x)^3}$ $\qquad y^{(4)}=-\dfrac{3!}{(1+x)^4}$

$\cdots\cdots$

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad (n\ge 1,\ \ 0!=1)$$

例4 设 $y=\sin x$, 求$y^{(n)}$.

解 $y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$$y''=\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y'''=\cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2})=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$$

……

$$\therefore (\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

同理可得 $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

例5 设 $y=e^{ax}\sin bx\,(a,b$为常数$)$,求$y^{(n)}$.

解 $y'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx$

$$=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)$$

$$=e^{ax}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+\varphi)\quad(\varphi=\arctan\frac{b}{a})$$

$$y''=\sqrt{a^2+b^2}\cdot[ae^{ax}\sin(bx+\varphi)+be^{ax}\cos(bx+\varphi)]$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+2\varphi)$$

……

$$y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{ax}\sin(bx+n\varphi)\qquad(\varphi=\arctan\frac{b}{a})$$

2. 高阶导数的运算法则:

设函数u和v具有n阶导数, 则

(1) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$

(2) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$

(3) $(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} v + nu^{(n-1)} v' + \dfrac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} v''$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} u^{(n-k)} v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

莱布尼茨公式

例6 设 $y = x^2 e^{2x}$，求 $y^{(20)}$.

解 设 $u = e^{2x}, v = x^2$，则由莱布尼兹公式知

$$y^{(20)} = (e^{2x})^{(20)} \cdot x^2 + 20(e^{2x})^{(19)} \cdot (x^2)'$$

$$+ \frac{20(20-1)}{2!}(e^{2x})^{(18)} \cdot (x^2)'' + 0$$

$$= 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x$$

$$+ \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2$$

$$= 2^{20} e^{2x}(x^2 + 20x + 95)$$

3. **间接法**：利用已知的高阶导数公式，通过四则运算，变量代换等方法，求出n阶导数.

常用高阶导数公式

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a>0)$ $\qquad (e^x)^{(n)} = e^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n\cdot\frac{\pi}{2})$

(3) $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n\cdot\frac{\pi}{2})$

(4) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

(5) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$ $\qquad (\frac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$

例7 设 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$，求$y^{(5)}$.

解 $\because y=\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$$\therefore y^{(5)}=\frac{1}{2}\left[\frac{-5!}{(x-1)^6}-\frac{-5!}{(x+1)^6}\right]$$

$$=60\left[\frac{1}{(x+1)^6}-\frac{1}{(x-1)^6}\right]$$

例8 设 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$, 求$y^{(n)}$.

解 $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

$$\therefore\ y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cdot\cos(4x+n\cdot\frac{\pi}{2}).$$