第四章 中值定理与导数应用

第一节 中值定理

一、罗尔定理

二、拉格朗日中值定理

三、柯西中值定理

一、罗尔定理

罗尔（Rolle）定理　如果函数 (1) 在闭区间 上连续，(2) 在开区间 内可导，(3) 且在区间端点的函数值相等，即 ，那末在 内至少有一点 ，使得函数 在该点的导数等于零，

即

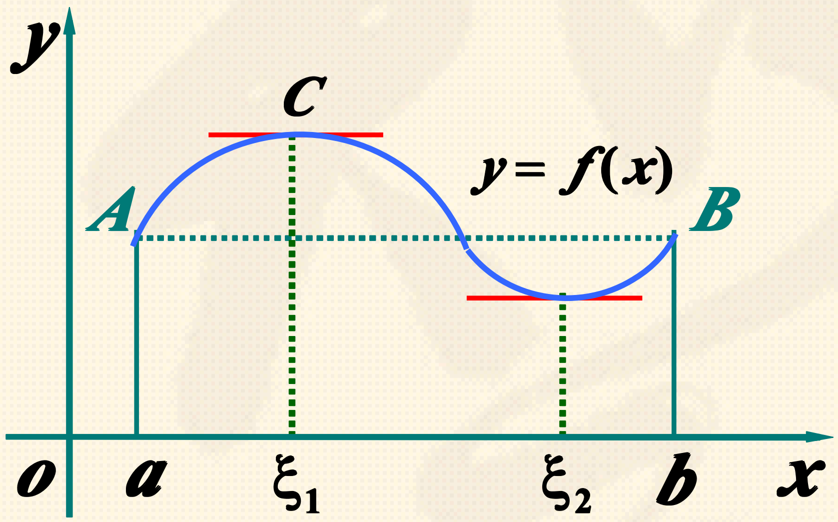
例如，$f(x)=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$.

在$[-1,3]$上连续，在$(-1,3)$上可导，且 $f(-1)=f(3)=0$,

$\because f'(x)=2(x-1)$，　取$\xi=1,\ (1\in(-1,3))$　$f'(\xi)=0$.

几何解释:

在曲线弧AB上至少有一点C,在该点处的切线是水平的.



证 $\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 必有最大值 M 和最小值 m.

(1) 若 $M=m$. 则 $f(x)=M$.

由此得 $f'(x)=0$. $\forall \xi \in (a,b)$, 都有 $f'(\xi)=0$.

(2) 若 $M \neq m$. $\because f(a)=f(b)$,

$\therefore$ 最值不可能同时在端点取得.

设 $M \neq f(a)$,

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $f(\xi)=M$.

$\because f(\xi+\Delta x) \le f(\xi)$, $\therefore f(\xi+\Delta x)-f(\xi) \le 0$,

若 $\Delta x > 0$, 则有 $\dfrac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} \le 0;$

若 $\Delta x < 0$, 则有 $\dfrac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} \ge 0;$

$$\therefore f'_-(\xi) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} \ge 0;$$

$$f'_+(\xi) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} \le 0;$$

$\because f'(\xi)$存在, $\quad \therefore f'_-(\xi) = f'_+(\xi).$

$\therefore$ 只有 $f'(\xi) = 0.$

注意:若罗尔定理的三个条件中有一个不满足,其结论可能不成立.

例如, $y=|x|, x\in[-2,2];$

在 $[-2,2]$ 上除 $f'(0)$ 不存在外,满足罗尔定理的一切条件,但在区间 $[-2,2]$ 内找不到一点能使 $f'(x)=0.$

又例如, $y=\begin{cases}1-x, & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases};$

$$y=x, x\in[0,1].$$

例1 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于 1的正实根.

证: 设 $f(x)=x^5-5x+1$, 则 $f(x)$在$[0,1]$连续,

且 $f(0)=1, f(1)=-3.$ 由介值定理

$\exists\, x_0\in(0,1),$ 使 $f(x_0)=0.$ 即为方程的小于1的正实根.

设另有 $x_1\in(0,1), x_1\neq x_0,$ 使 $f(x_1)=0.$

$\because$ $f(x)$ 在 x_0, x_1 之间满足罗尔定理的条件,

$\therefore$ 至少存在一个ξ (在 x_0, x_1 之间),使得 $f'(\xi)=0.$

但 $f'(x)=5(x^4-1)<0, (x\in(0,1))$矛盾, $\therefore$ 为唯一实根.

二、拉格朗日中值定理

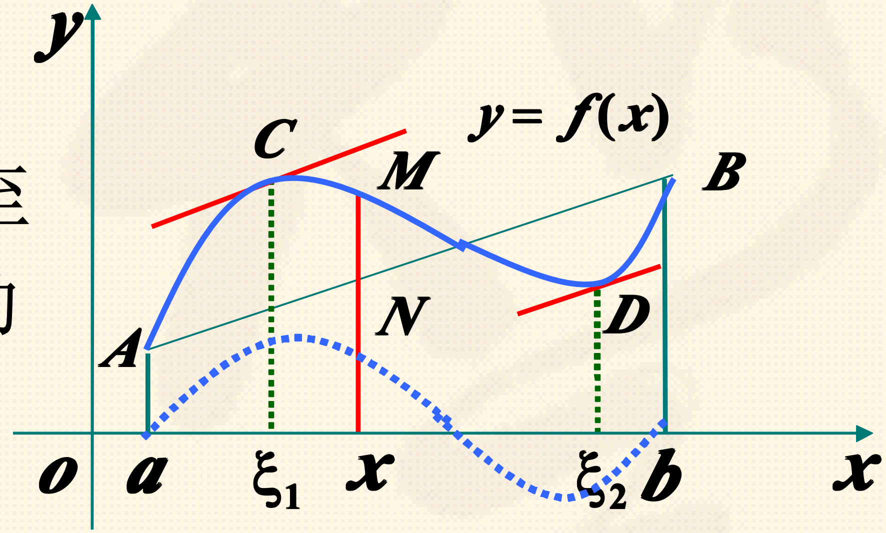
拉格朗日中值定理　如果函数 $f(x)$(1)在闭区间 上连续，(2)在开区间　内可导，那末在 内至少有一点　，使等式 成立.

注意：与罗尔定理相比条件中去掉了 $f(a)=f(b)$.

结论亦可写成 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$.

几何解释:

在曲线弧 AB 上至少有一点 C,在该点处的切线平行于弦 AB.



证 分析: 条件中与罗尔定理相差 $f(a)=f(b)$.

弦AB方程为 $y=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

曲线 $f(x)$ 减去弦 AB,

所得曲线 a,b两端点的函数值相等 .

作辅助函数

$$F(x)=f(x)-[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)].$$

$F(x)$ 满足罗尔定理的条件,

则在(a,b)内至少存在一点ξ,使得 $F'(\xi)=0.$

即 $f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

或 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$

拉格朗日中值公式

注意:拉氏公式精确地表达了函数在一个区间上的增量与函数在这区间内某点处的导数之间的关系.

设 $f(x)$在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，

$x_0, x_0+\Delta x \in (a,b)$，则有

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

也可写成 $\Delta y = f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$

增量Δy的精确表达式.

拉格朗日中值公式又称**有限增量公式.**

微分中值定理

拉格朗日中值定理又称**有限增量定理.**

推论 **如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为零，那末 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.**

例2　证明 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}\ (-1\le x\le 1).$

证　设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x,\quad x\in[-1,1]$

$$\because f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=0.$$

$$\therefore f(x)\equiv C,\quad x\in[-1,1]$$

又 $\because f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=0+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2},$

即 $C=\dfrac{\pi}{2}.$

$$\therefore \arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

例3 证明当$x>0$时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$

证 设 $f(x)=\ln(1+x)$,

$f(x)$在$[0,x]$上满足拉氏定理的条件，

$$\therefore f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),\ (0<\xi<x)$$

$\because f(0)=0, f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，由上式得 $\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}$,

又$\because 0<\xi<x \Rightarrow 1<1+\xi<1+x \Rightarrow \dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+\xi}<1$,

$\therefore \dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x$, 即 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$

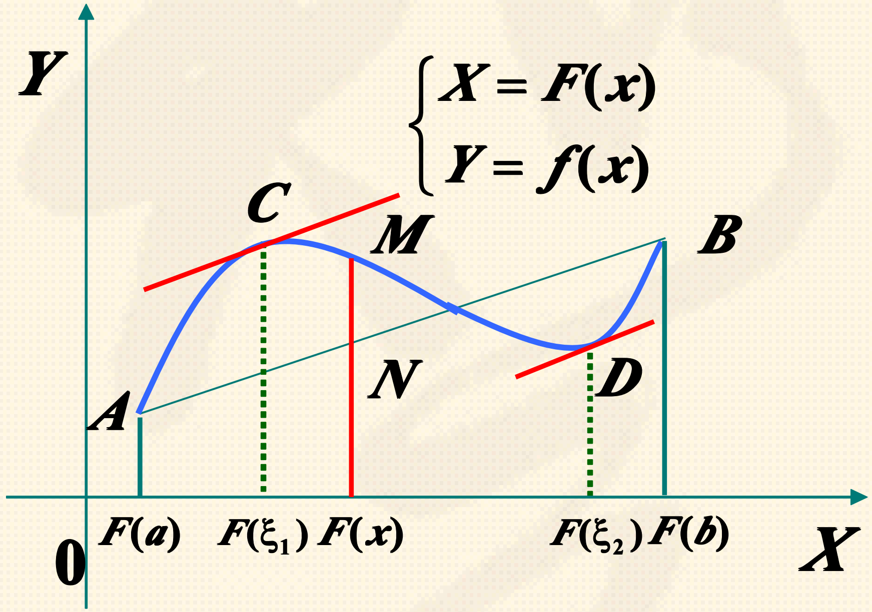
三、柯西中值定理

柯西（Cauchy）中值定理 如果函数 及 在闭区间 上连续，在开区间 内可导，且 在 内每一点处均不为零，那末在 内至少有一点 ，使等式

成立.

几何解释:

在曲线弧AB上至少有一点$C(F(\xi),f(\xi))$,在该点处的切线平行于弦AB.



证 作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}[F(x)-F(a)].$$

$\varphi(x)$满足罗尔定理的条件,

则在(a,b)内至少存在一点 ξ,使得 $\varphi'(\xi)=0$.

则在(a,b)内至少存在一点ξ，使得 $\varphi'(\xi)=0$.

即 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}\cdot F'(\xi)=0$,

$$\therefore \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

当 $F(x)=x$, $\quad F(b)-F(a)=b-a,\ F'(x)=1$,

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

例4 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，证明：至少存在一点$\xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

证 分析：结论可变形为

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi} = \left.\frac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\xi}.$$ 设 $g(x) = x^2$,

则 $f(x), g(x)$ 在$[0,1]$上满足柯西中值定理的条件,

$\therefore$ 在$(0,1)$内至少存在一点ξ，有

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$$ 即 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.