第三节　分部积分法

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

问题 $\int xe^{x}\mathrm{d}x = ?$

解决思路 利用两个函数乘积的求导法则.

设函数 和 具有连续导数, u

$$(uv)' = u'v + uv', \qquad uv' = (uv)' - u'v,$$

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int u'v\mathrm{d}x, \qquad \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

分部积分(integration by parts)公式

例1 求积分 $\int x\cos x\mathrm{d}x$.

解（一） 令 $u=\cos x$, $x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(x^2\right)=\mathrm{d}v$

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\cos x+\int\frac{x^2}{2}\sin x\mathrm{d}x$$

显然，u,v' 选择不当，积分更难进行.

解（二） 令 $u=x$, $\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x=\mathrm{d}v$

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\sin x=x\sin x-\int\sin x\mathrm{d}x$$

$$=x\sin x+\cos x+C.$$

例2 求积分 $\int x^2 e^x \mathrm{d}x$.

解 $u = x^2$, $e^x \mathrm{d}x = \mathrm{d}e^x = \mathrm{d}v$,

$$\int x^2 e^x \mathrm{d}x = x^2 e^x - 2\int x e^x \mathrm{d}x$$

（再次使用分部积分法）$u = x$, $e^x \mathrm{d}x = \mathrm{d}v$

$$= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C.$$

总结 若被积函数是幂函数和正(余)弦函数或幂函数和指数函数的乘积，就考虑设幂函数为 u，使其降幂一次(假定幂指数是正整数)

例3 求积分 $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x.$

解 令 $u=\arctan x,\ x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)=\mathrm{d}v$

$$\int x\arctan x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{2}\mathrm{d}(\arctan x)$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C.$$

例4 求积分 $\int x^3 \ln x dx.$

解 $u = \ln x,\ x^3 dx = d\left(\frac{x^4}{4}\right) = dv,$

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

总结 若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就考虑设对数函数或反三角函数为 u.

例5 求积分 $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x.$

解 $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = x\sin(\ln x) - \int x\mathrm{d}[\sin(\ln x)]$

$$= x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + \int x\mathrm{d}[\cos(\ln x)]$$

$$= x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] - \int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$$

$$\therefore \int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$$

例6 求积分 $\int e^x \sin x \mathrm{d}x.$

解 $\int e^x \sin x \mathrm{d}x = \int \sin x \mathrm{d}(e^x)$

$= e^x \sin x - \int e^x \mathrm{d}(\sin x)$

$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \mathrm{d}x = e^x \sin x - \int \cos x \mathrm{d}(e^x)$

$= e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x \mathrm{d} \cos x)$

$= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \mathrm{d}x$ 注意循环形式

$\therefore \int e^x \sin x \mathrm{d}x = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$

例7 求积分 $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

解 $\because \quad \left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$

$$\therefore \quad \int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int \arctan x \mathrm{d}\left(\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}(\arctan x)$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \qquad \text{令 } x = \tan t$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}\sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t$$

$$= \ln(\sec t + \tan t) + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

例 8 已知　　的一个原函数是　　，求　　　　.

解 $\int xf'(x)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}[f(x)] = xf(x) - \int f(x)\mathrm{d}x,$

$\because \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x), \quad \therefore \int f(x)\mathrm{d}x = e^{-x^2} + C,$

两边同时对 x 求导, 得　$f(x) = -2xe^{-x^2},$

$\therefore \int xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x) - \int f(x)\mathrm{d}x$

$$= -2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$$