第四节 有理函数的积分

一、六个基本积分

二、待定系数法举例

一、六个基本积分

有理函数的定义：

两个多项式的商表示的函数称之为有理函数.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

其中 、 都是非负整数； 及

都是实数，并且 ， .

假定分子与分母之间没有公因式

(1) $n < m$, 这有理函数是**真分式**;

(2) $n \geq m$, 这有理函数是**假分式**;

利用多项式除法, 假分式可以化成一个多项式和一个真分式之和.

例 $$\frac{x^3+x+1}{x^2+1} = x + \frac{1}{x^2+1}.$$

难点 将有理函数化为部分分式之和.

理论上，任何一个有理函数(真分式)都可分为以下六个类型的基本积分的代数和：

$$1.\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = \ln|x+a| + C$$

$$2.\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^n} = \frac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}} + C \quad (n \geq 2)$$

$$3.\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

4. $$\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C$$

5. $$\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} + C \quad (n \ge 2)$$

6. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} \quad (n \ge 2)$$

可用递推法求出

二、待定系数法举例

有理函数化为部分分式之和的一般规律：

（1）分母中若有因式 $(x-a)^k$，则分解后为

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a},$$

其中 $A_1, A_2, \ldots$ 都是常数.

特殊地：$k=1$，分解后为 $\frac{A}{x-a}$；

（2）分母中若有因式 $(x^2+px+q)^k$，其中 $p^2-4q<0$ 则分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

其中 都是常数 M .

特殊地：$k=1$，分解后为 $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$；

真分式化为部分分式之和的**待定系数法**

例1 $$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},$$

$$\because \quad x+3=A(x-3)+B(x-2),$$

$$\therefore \quad x+3=(A+B)x-(3A+2B),$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1, \\ -(3A+2B)=3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-5 \\ B=6 \end{cases},$$

$$\therefore \quad \frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}.$$

例2 $$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1},$$

$$1=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1) \qquad (1)$$

代入特殊值来确定系数 A,B,C

取 $x=0,\ \Rightarrow A=1$ 　　取 $x=1, \Rightarrow B=1$

取 $x=2,$ 并将 A,B 值代入 (1) $\Rightarrow C=-1$

$$\therefore \frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}.$$

例3 $$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2},$$

$$1=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+2x),$$

整理得 $1=(A+2B)x^2+(B+2C)x+C+A,$

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \Rightarrow A=\frac{4}{5}, B=-\frac{2}{5}, C=\frac{1}{5},$$

$$\therefore \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}+\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}.$$

例4 求积分 $\int \frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x.$

解 $$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{x-1} - \ln|x-1| + C.$$

例5 求积分 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x.$

解
$$\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{4}{5}}{1+2x}\mathrm{d}x + \int \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{5}\ln(1+2x) - \frac{1}{5}\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{5}\ln(1+2x) - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C.$$

例6 求积分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}\mathrm{d}x.$

解 令 $t=e^{\frac{x}{6}} \Rightarrow x=6\ln t,\qquad \mathrm{d}x=\frac{6}{t}\mathrm{d}t,$

$$\int \frac{1}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{1+t^3+t^2+t}\cdot\frac{6}{t}\mathrm{d}t$$

$$=6\int \frac{1}{t(1+t)(1+t^2)}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{6}{t}-\frac{3}{1+t}-\frac{3t+3}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int \left(\frac{6}{t} - \frac{3}{1+t} - \frac{3t+3}{1+t^2} \right) \mathrm{d}t$$

$$= 6\ln t - 3\ln(1+t) - \frac{3}{2} \int \frac{\mathrm{d}(1+t^2)}{1+t^2} - 3\int \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t$$

$$= 6\ln t - 3\ln(1+t) - \frac{3}{2}\ln(1+t^2) - 3\arctan t + C$$

$$= x - 3\ln(1+e^{\frac{x}{6}}) - \frac{3}{2}\ln(1+e^{\frac{x}{3}}) - 3\arctan(e^{\frac{x}{6}}) + C.$$

说明 将有理函数化为部分分式之和后，只出现三类情况：

(1) 多项式； (2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$； (3) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$；

讨论积分 $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$,

$$\because\ x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4},$$

令 $x+\dfrac{p}{2}=t$

记 $x^2+px+q=t^2+a^2,\quad Mx+N=Mt+b,$

则 $a^2=q-\dfrac{p^2}{4},\quad b=N-\dfrac{Mp}{2},$

$$\therefore \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{Mt}{(t^2+a^2)^n}\mathrm{d}t+\int \frac{b}{(t^2+a^2)^n}\mathrm{d}t$$

(1) $n=1$, $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{b}{a}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C;$$

(2) $n>1$, $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{M}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}+b\int\frac{1}{(t^2+a^2)^n}dt.$$

这三类积分均可积出，且原函数都是初等函数.

结论：

有理函数都可积，且积分结果可能的形式为有理函数、反正切函数、对数函数及它们之间的组合。

任何有理函数都有初等原函数，任何初等函数在其连续区间内也有原函数，但并不是所有连续的初等函数都有初等原函数，如：

$$\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,\ \int e^{-x^2}\mathrm{d}x,\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x},\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+1}}.$$

即有些初等函数是积不出来的。