第七章 多元函数微分学

第一节　空间直角坐标系

一、空间点的直角坐标

二、空间两点间的距离

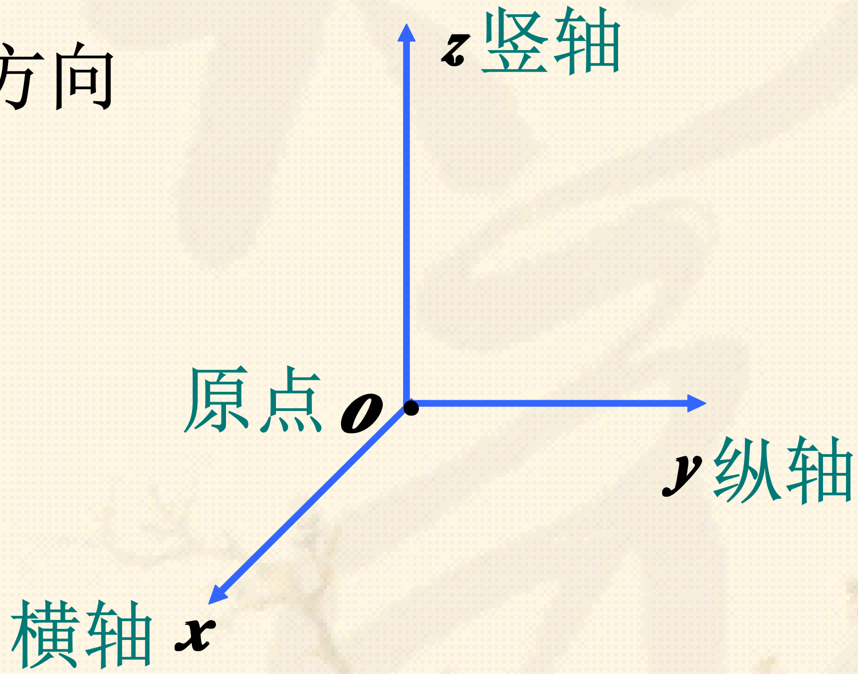
三、曲面方程的概念

四、空间曲线方程的概念

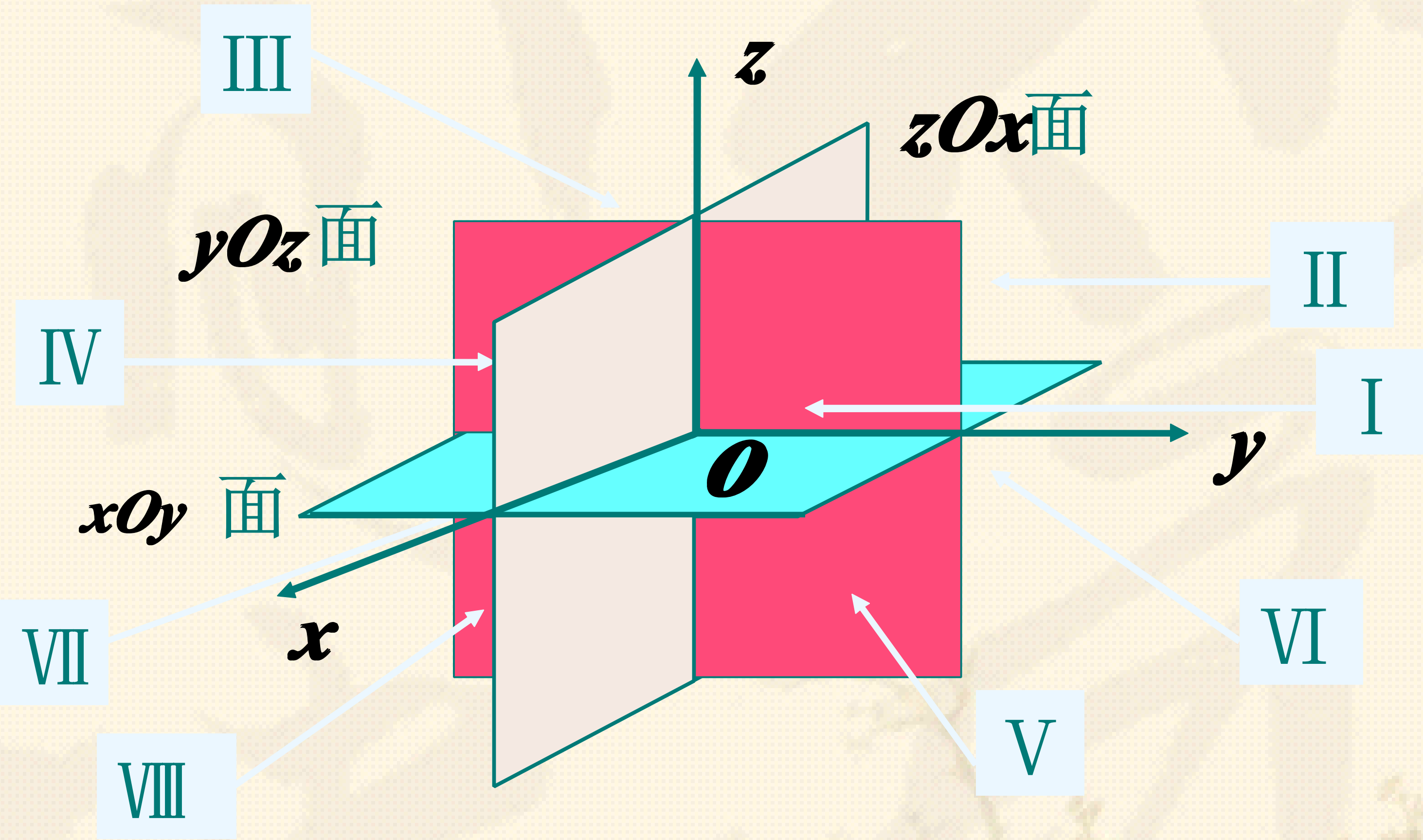
一、空间点的直角坐标

三条坐标轴的正方向符合右手法则.

即以右手握住 轴，当右手的四个手指从 轴正向以 角度转向正向 轴时，大拇指的指向就是 轴的正向.



空间直角坐标系

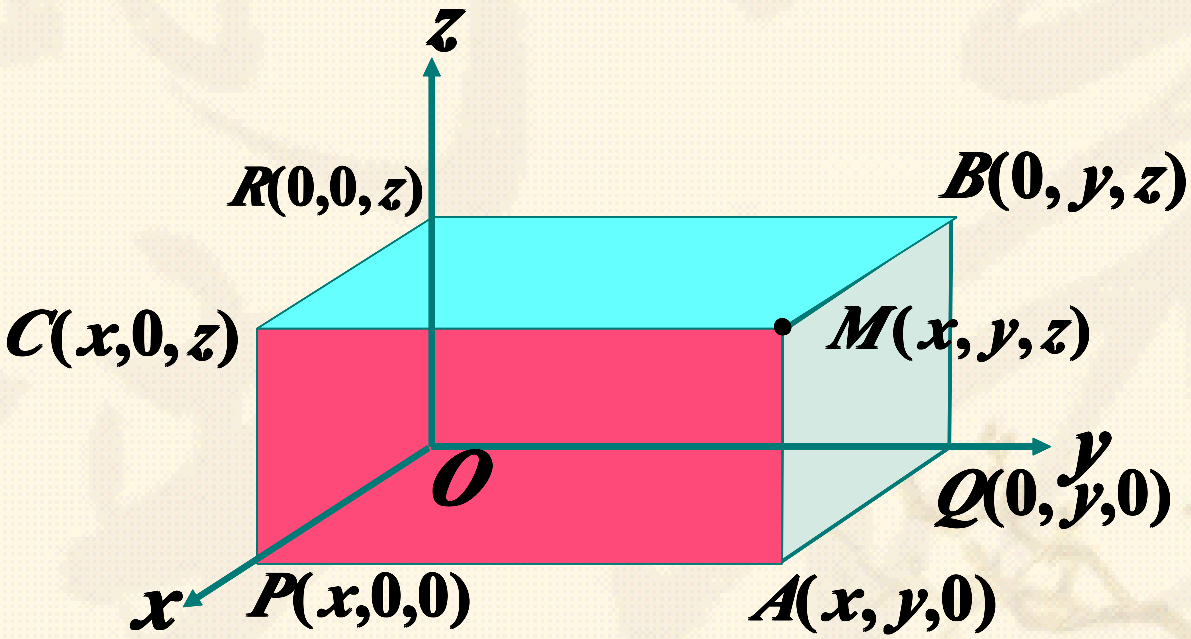


空间被分为八个卦限

空间的点 $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 有序数组 (x, y, z)

特殊点的表示： 坐标轴上的点 $P, Q, R,$

坐标面上的点 $A, B, C,$ 坐标原点 $O(0,0,0)$



例 1 求点　关于(1)xOy面；(2)z轴；(3)坐标原点；(4)点　的对称点坐标.

解 设所求对称点的坐标为(x_2, y_2, z_2)，则

(1) $x_2 = x_1, y_2 = y_1, z_1 + z_2 = 0,$ 即所求的点的坐标为 $(x_1, y_1, -z_1)$；

(2) $x_1 + x_2 = 0, y_1 + y_2 = 0, z_2 = z_1,$

即所求的点的坐标为$(-x_1, -y_1, z_1)$；

(3) $x_1 + x_2 = 0, y_1 + y_2 = 0, z_1 + z_2 = 0,$

即所求的点的坐标为$(-x_1, -y_1, -z_1)$；

(4) $\dfrac{x_1+x_2}{2}=a, \dfrac{y_1+y_2}{2}=b, \dfrac{z_1+z_2}{2}=c,$

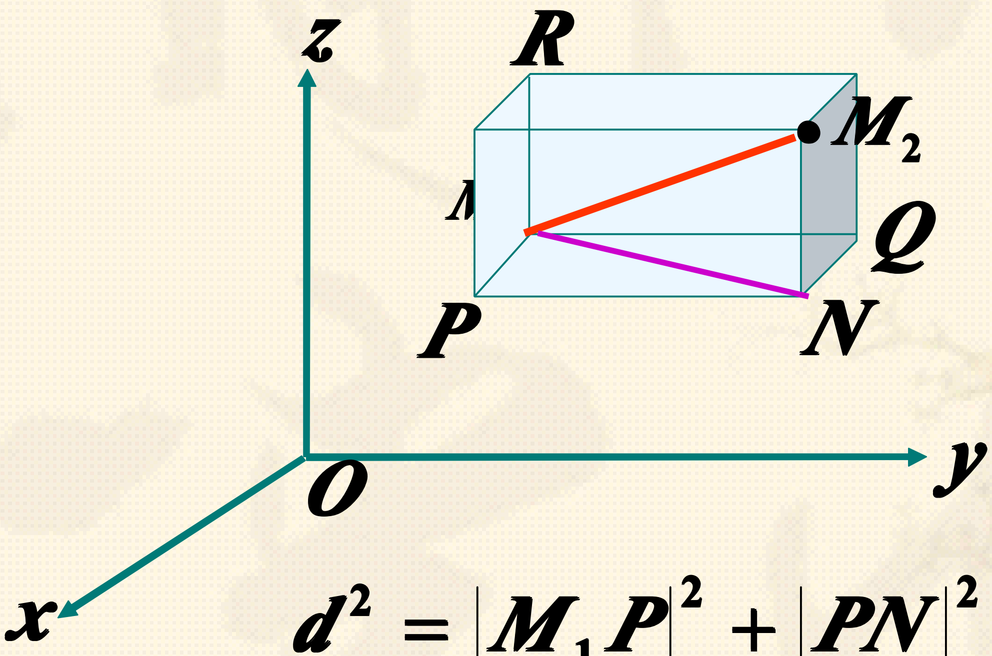
即所求的点的坐标为

$$(2a-x_1, 2b-y_1, 2c-z_1).$$

二、空间两点间的距离

设　　　　　　　　、　　　　　　　　为空间两点,

$$d = |M_1M_2| = ?$$



在直角

及直角

中，使用勾

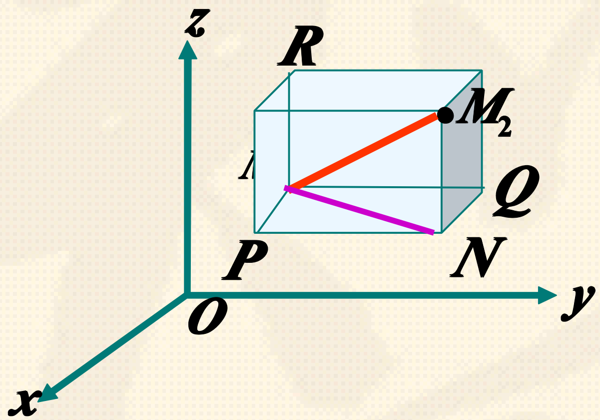
理知

$$d^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2,$$

$\because |M_1P| = |x_2 - x_1|$,

$|PN| = |y_2 - y_1|$,

$|NM_2| = |z_2 - z_1|$,



$$\therefore d = \sqrt{|M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2}$$

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

空间两点间距离公式

特殊地：若两点分别为 $M(x, y, z)$，$O(0,0,0)$

则 $d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

例 2 在 y 轴上求与点 和点 等距离的点.

解 因所求点 M 在 y 轴上，可设其坐标为 $(0, y, 0)$ ，

依题意有

$$|MA| = |MB|,$$

即

$$\sqrt{(0-3)^2+(y+1)^2+(0-1)^2} = \sqrt{(0-0)^2+(y-1)^2+(0-2)^2}$$

解之得 $y = -\frac{3}{2}$，故所求点为 $M\left(0, -\frac{3}{2}, 0\right)$.

例 3 求证以 、 、

三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解 $|M_1M_2|^2 = (7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$

$|M_2M_3|^2 = (5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$

$|M_3M_1|^2 = (4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6,$

$\therefore |M_2M_3| = |M_3M_1|,$ 原结论成立.

例 4 设 在 轴上，它到点 的距离为到点 的距离的两倍，求点 的坐标.

解 因为 在 轴上，设 P 点坐标为 $(x,0,0)$,

$$|PP_1| = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 11},$$

$$|PP_2| = \sqrt{x^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 + 2},$$

$$\because |PP_1| = 2|PP_2|, \quad \therefore \sqrt{x^2 + 11} = 2\sqrt{x^2 + 2}$$

$\Rightarrow x = \pm 1$, 所求点为 $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$.

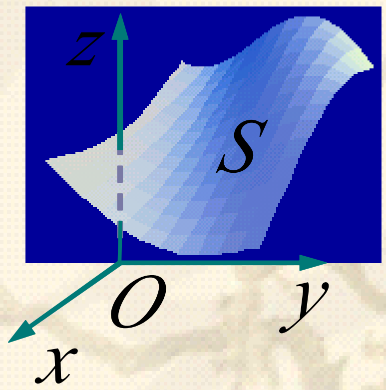
三、曲面方程的概念

定义 如果曲面 S 与方程 $F(x,y,z)=0$ 有下述关系:

(1) 曲面 S 上的任意点的坐标都满足此方程

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标不满足此方程

$F(x,y,z)=0$



则 $F(x,y,z)=0$ 叫做**曲面 S 的方程,**

曲面 S 叫做方程 $F(x,y,z)=0$ 的**图形.**

两个基本问题 :

(1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时，求曲面方程.

(2) 已知方程时，研究它所表示的几何形状

(必要时需作图).

例5 求三个坐标平面的方程.

解 容易看到 xOy 平面上任意一点的坐标必有

满足 的点也必然在 xOy 平面上，所以 xOy

平面的方程为

同理，yOz平面的方程为 $x = 0.$

zOx平面的方程为 $y = 0.$

例6 作 $z=c$（c为常数）的图形.

解 方程　　　中不含　　　，这意味着 x 与 y 可取任意值而总有值　　　，其图形是平行于 xOy 平面的平面. 可由 xOy 平面向上　　　或向下　　　移动　个单位得到.

同理，　$x=a$ 和　$y=b$ 分别表示平行于yOz平面和xOz平面.

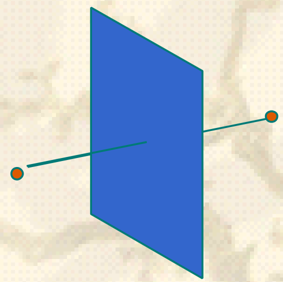
例7: 求到两定点$A(1,2,3)$ 和$B(2,-1,4)$等距离的点的轨迹方程.

解: 设轨迹上的动点为 $M(x,y,z)$, 则 $|AM|=|BM|$, 即

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$$
$$=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$$

化简得 $2x-6y+2z-7=0$

说明: 动点轨迹为线段 AB 的垂直平分面.



前面三个例子中，所讨论的方程都是一次方程，所考察的图形都是平面.可以证明空间中任意一个平面的方程式三元一次方程

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

其中 A, B, C, D 均为常数，A, B, C 且不全为0.

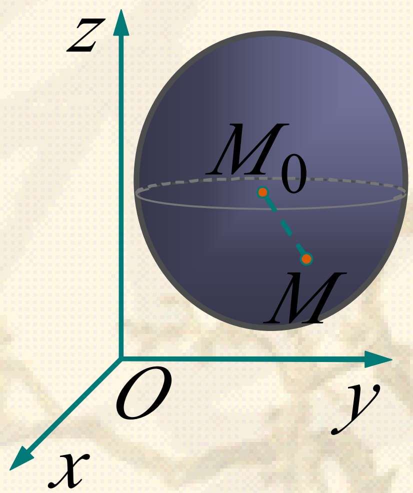
例8. 求动点到定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 距离为 $\boldsymbol{R}$ 的轨迹方程.

解: 设轨迹上动点为$M(x, y, z)$, 依题意 $|M_0M| = R$

即 $$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

故所求方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$



特别,当$\boldsymbol{M_0}$在原点时,球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

$z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 表示上(下)球面 .

例9. 研究方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样的曲面.

解 配方得 $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$

可见此方程表示一个球面

球心为 $M_0(1,-2,0)$, 半径为$\sqrt{5}$

说明 如下形式的三元二次方程 ($A\neq 0$)

$$A(x^2+y^2+z^2)+Dx+Ey+Fz+G=0$$

都可通过配方研究它的图形.其图形可能是

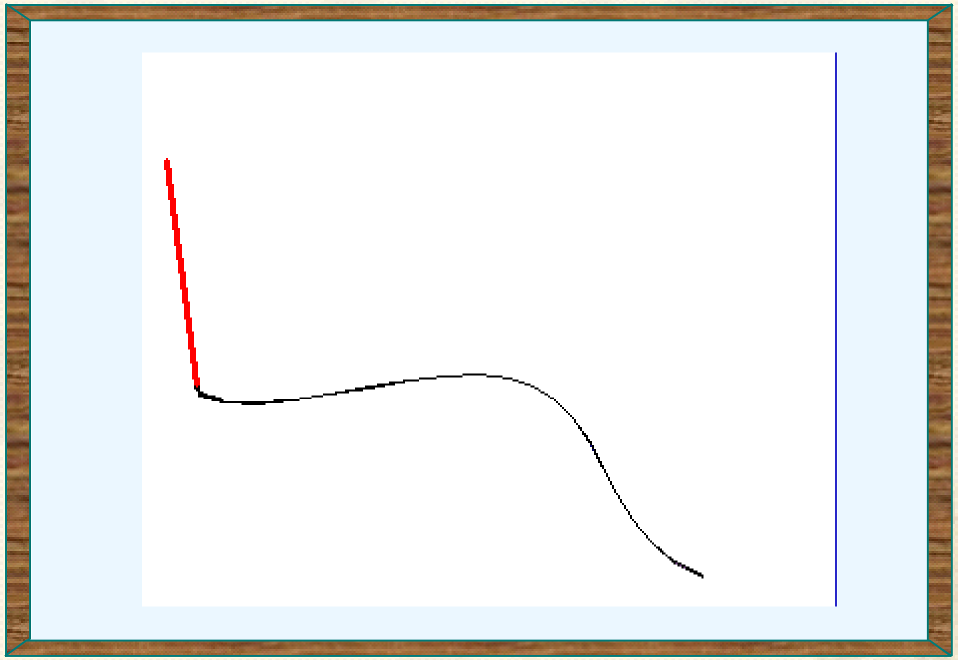
一个球面 ， 或点， 或虚轨迹.

柱面

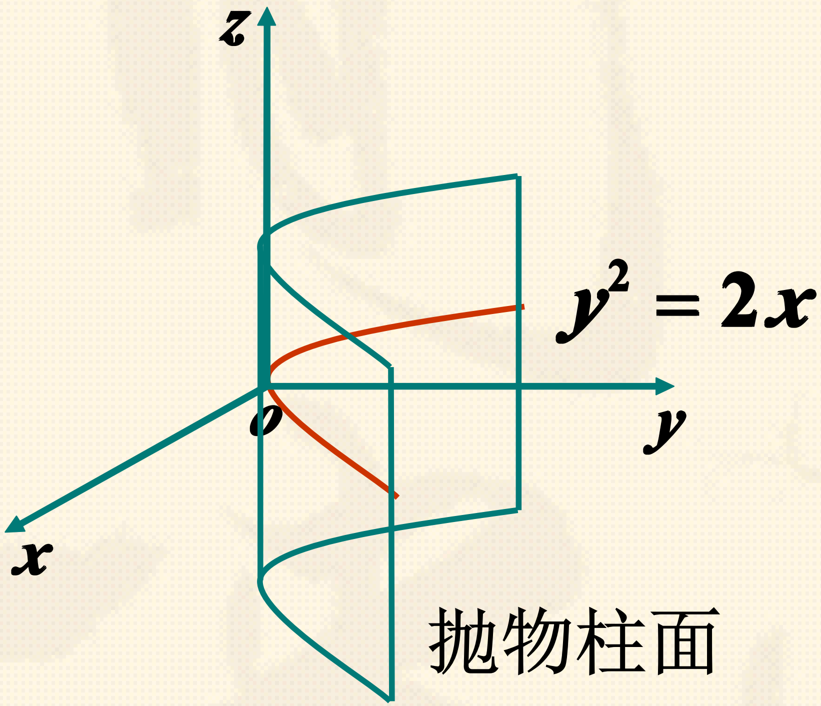
定义　平行于定直线并沿定曲线 *C* 移动的直线 *L* 所形成的曲面称为柱面。

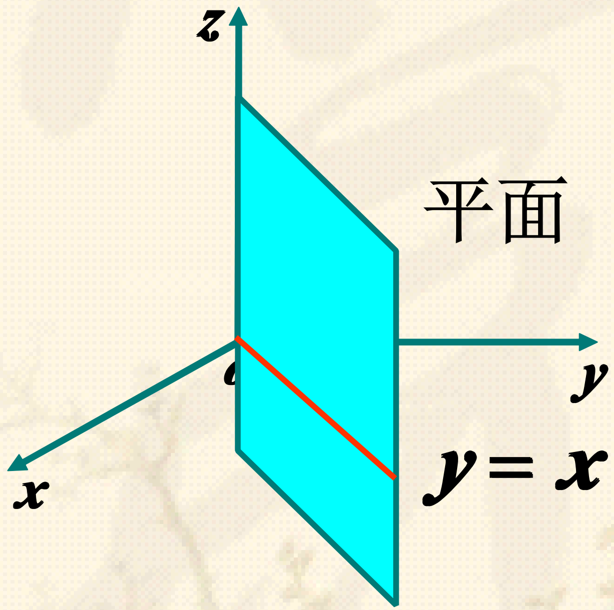
这条定曲线**C**叫柱面的准线**(directrix)** **,**动直线**L**叫柱面的母线**(generatrix).**

观察柱面的形成过程**:**



柱面举例





从柱面方程看柱面的特征：

只含 而缺 的方程 ，在

空间直角坐标系中表示母线平行于 轴的柱面，其准线为 面上曲线 .

实例

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ 椭圆柱面 母线// x轴

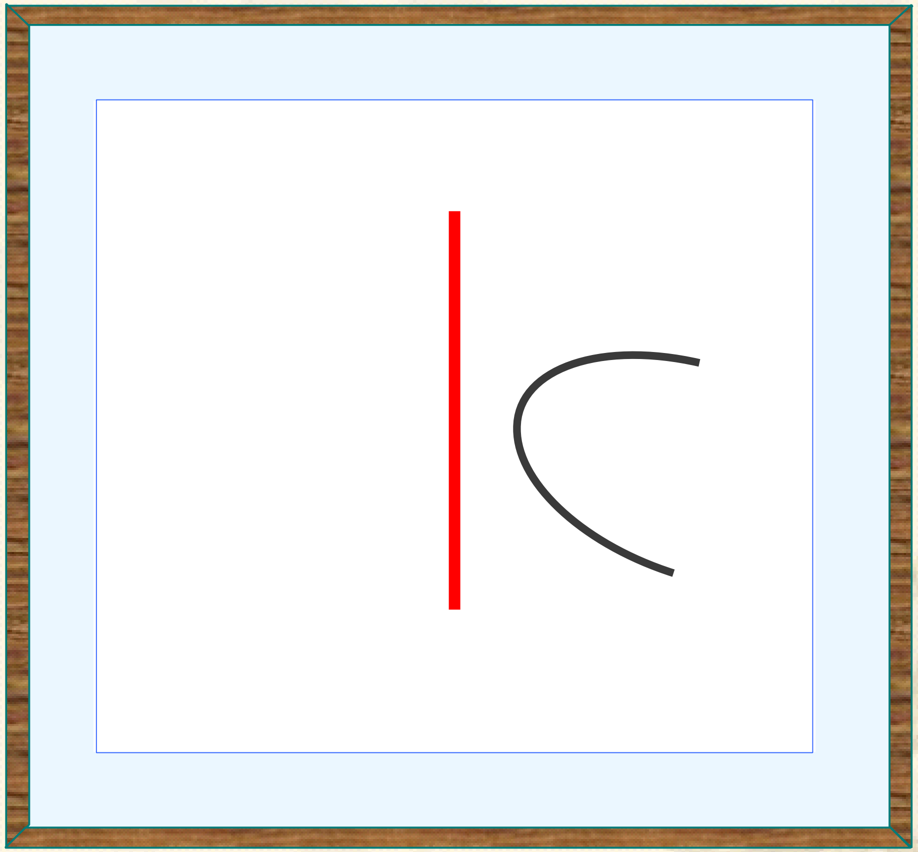
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ 双曲柱面 母线// z轴

$$x^2=2pz$$ 抛物柱面 母线// y轴

旋转曲面

定义　以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.

这条定直线叫旋转曲面的轴.



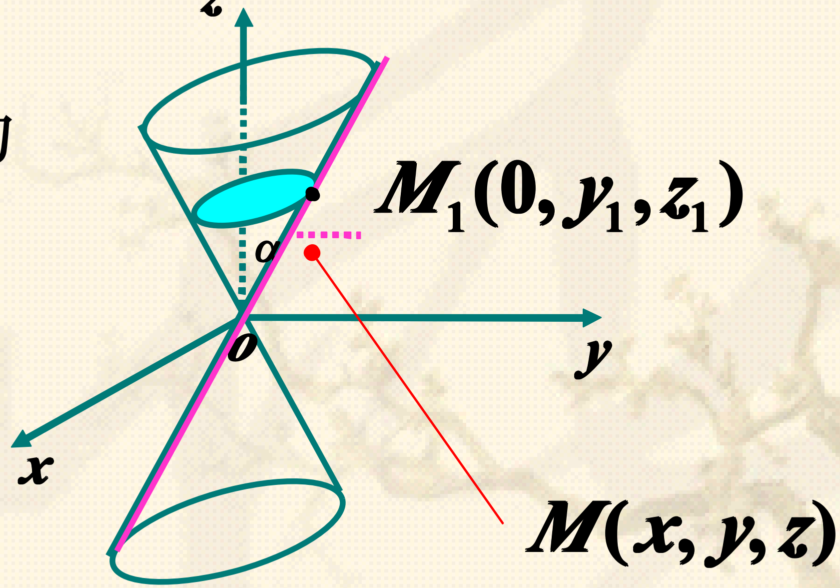
例 10 直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周，所得旋转曲面叫圆锥面．两直线的交点叫圆锥面的顶点，两直线的夹角 $\alpha\ (0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ 叫圆锥面的半顶角．试建立顶点在坐标原点，旋转轴为 z 轴，半顶角为 α 的圆锥面方程.

解 yoz 面上直线方程为

$$z = y\cot\alpha$$

圆锥面方程

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\cot\alpha$$



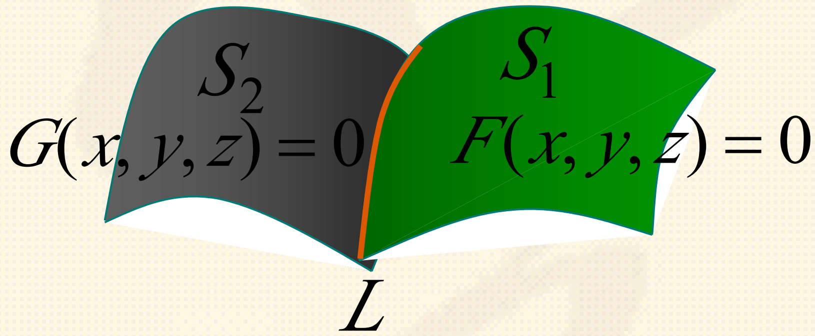
例11 抛物线　　　　　　　绕 z 轴 旋转，形成：

旋转抛物面　$x^2 + y^2 = 2pz$

※四、空间曲线方程的概念

空间曲线可视为两曲面的交线, 其一般方程为方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$



例如, 前面方程组中的两个曲面方程分别是两个不平行的平面方程，即

这就是空间直线方程，其图形为空间直线.