

第七章

## 第六节 隐函数的求导公式



# 一、一个方程的情形

## 1. $F(x, y) = 0$

**隐函数存在定理 1** 设函数  $F(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某一邻域内具有连续的偏导数，且  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ ，则方程  $F(x, y) = 0$  在点  $(x_0, y_0)$  的某一邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续导数的函数  $y = y(x)$ ，它满足条件  $F(x, y(x)) = 0$ ，并有

隐函数的求导公式



**例 1** 验证方程  $x^2 + y^2 = 1$  在点  $(0, 1)$  的某邻域内能唯一确定一个单值可导、且  $F_y \neq 0$  时的隐函数  $y = y(x)$ ，并求这函数的一阶和二阶导数在  $x = 0$  的值。

**解** 令  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

则  $F_x = 2x, F_y = 2y,$

$$F(0,1) = 0, \quad F_y(0,1) = 2 \neq 0,$$

依定理知方程  $x^2 + y^2 = 1$  在点  $(0, 1)$  的某邻域内能唯一确定一个单值可导、且  $F_y \neq 0$  时的函数  $y = y(x)$ 。



函数的一阶和二阶导数为

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x}{y}, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{1}{y^3},$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = -1.$$



**例 2** 已知  $F(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x}$ ，求  $\frac{dy}{dx}$ 。

**解** 令  $F(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x}$ ，

$$\text{则 } F_x(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}, \quad F_y(x, y) = \frac{y - x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x + y}{y - x}.$$



## 2. $F(x, y, z) = 0$

**隐函数存在定理 2** 设函数  $F(x, y, z)$  在点

$(x_0, y_0, z_0)$  的某一邻域内有连续的偏导数, 且

$$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \quad \text{在点 } (x_0, y_0, z_0) \text{ 的某一邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数}$$

它满足条件

$$F(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

并有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$



例 3 设  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

解 令  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z$ ,

则  $F_x = 2x, F_z = 2z - 4, \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{x}{2-z},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(2-z) + x \frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2} = \frac{(2-z) + x \cdot \frac{x}{2-z}}{(2-z)^2}$$

$$= \frac{(2-z)^2 + x^2}{(2-z)^3}.$$



**例 4** 设  $z = f(x, y, z)$ ，求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}$ ， $\frac{\partial z}{\partial z}$ 。

思路：把  $z$  看成  $x, y, z$  的函数对  $x$  求偏导数得  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ，

把  $z$  看成  $x, y, z$  的函数对  $y$  求偏导数得  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ，

把  $z$  看成  $x, y, z$  的函数对  $z$  求偏导数得  $\frac{\partial z}{\partial z}$ 。

**解** 令  $u = x + y + z$ ， $v = xyz$ ，

则  $z = f(u, v)$ ，





把  $z$  看成  $x$  的函数对  $x$  求偏导数得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_u \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + f_v \cdot (yz + xy \frac{\partial z}{\partial x}),$$

整理得 
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f_u + yzf_v}{1 - f_u - xyf_v},$$

把  $x$  看成  $y$  的函数对  $y$  求偏导数得

$$0 = f_u \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial y} + 1\right) + f_v \cdot (xz + yz \frac{\partial x}{\partial y}),$$



整理得 
$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{f_u + xzf_v}{f_u + yzf_v},$$

把 看成 的函数对 求偏导数得

$$1 = f_u \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z} + 1\right) + f_v \cdot (xy + xz \frac{\partial y}{\partial z}),$$

整理得 
$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1 - f_u - xyf_v}{f_u + xzf_v}.$$

