# 第六节　隐函数的求导公式

# 一、一个方程的情形

1. $F(x,y)=0$

隐函数存在定理 1　设函数　　　　在点　　　　　　的某一邻域内具有连续的偏导数，且　　　　　　，　　　　　　，则方程　　　　　在点　　　　　　的某一邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续导数的函数　　　　，它满足条件　　　　，并有

$\frac{dx}{}$ $F$

.

隐函数的求导公式

**例 1** 验证方程 在点 的某邻域内能唯一确定一个单值可导、且 时的隐函数 ，并求这函数的一阶和二阶导数在 的值.

**解** 令 $F(x,y)=x^2+y^2-1$

则 $F_x=2x,\quad F_y=2y,$

$$F(0,1)=0,\qquad F_y(0,1)=2\neq 0,$$

依定理知方程 在点 的某邻域内能唯一确定一个单值可导、且 时 的函数 .

$x^2$

函数的一阶和二阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x}{y},\qquad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{y-x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}=-\frac{1}{y^3},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=-1.$$

**例 2**　已知　　　　　　　　　　　　，求　　.

**解**　令 $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\dfrac{y}{x}$,

则 $F_x(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$,　$F_y(x,y)=\dfrac{y-x}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x+y}{y-x}.$$

2. $F(x,y,z)=0$

隐函数存在定理 2 设函数 在点 的某一邻域内有连续的偏导数，且 ，则方程 在点 的某一邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数 ，它满足条件 ，

并有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$.

**例 3**　设　　　　　　　　　　　　　，求　　　.

**解**　令　$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z,$

则　$F_x=2x,\ \ F_z=2z-4,\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{x}{2-z},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-z)+x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)+x\cdot\dfrac{x}{2-z}}{(2-z)^2}$$

$$=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}.$$

**例 4** 设 ，求 ， ， .

思路：把 看成 的函数对 求偏导数得 ，

把 看成 的函数对 求偏导数得 ，

把 看成 的函数对 求偏导数得 .

**解** 令 $u = x + y + z, \quad v = xyz,$

则 $z = f(u, v),$

把 看成 的函数对 求偏导数得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_u \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + f_v \cdot \left(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

整理得 $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f_u + yzf_v}{1 - f_u - xyf_v},$$

把 看成 的函数对 求偏导数得

$$0 = f_u \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial y} + 1\right) + f_v \cdot \left(xz + yz\frac{\partial x}{\partial y}\right),$$

整理得 $$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{f_u+xzf_v}{f_u+yzf_v},$$

把 看成 的函数对 求偏导数得

$$1=f_u\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial z}+1\right)+f_v\cdot\left(xy+xz\frac{\partial y}{\partial z}\right),$$

整理得 $$\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1-f_u-xyf_v}{f_u+xzf_v}.$$