第二节　一阶微分方程

一、可分离变量的微分方程

二、齐次方程

三、一阶线性微分方程

四、变量代换法解方程

一、可分离变量的微分方程

$g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$ **可分离变量的微分方程.**

例如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x^2 y^{\frac{4}{5}} \Rightarrow y^{-\frac{4}{5}}\mathrm{d}y = 2x^2\mathrm{d}x,$

解法 设函数　　和　　是连续的,

$$\int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x$$

分离变量法

设函数　　和　　是依次为　　和　　的原函数, $G(y) = F(x) + C$ 为微分方程的解.

例1 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=2xy$ 的通解.

解 分离变量 $\frac{dy}{y}=2xdx,$

两端积分 $\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx,$

$$\ln y=x^2+C_1$$

$\therefore y=Ce^{x^2}$ 为所求通解.

例 2　求解方程 $\dfrac{dy}{dx}=ky$

（指数增长与指数衰减方程）

解　$\dfrac{1}{y}dy=kdx$　两端积分，得

$$\ln|y|=kx+c$$

（c 为任意常数）

从而

其中　　　　　为任意正常数，所以

$$= Be^{kx}$$

由此可知，微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = kx$

的解当 k>0 时总是指数增长的，

当 k<0 时，总是指数衰减的.

二、齐次方程

1. 定义 形如 $\dfrac{dy}{dx}=f(\dfrac{y}{x})$的微分方程称为齐次方程.

2.解法 作变量代换 $\boxed{u=\dfrac{y}{x},}$ 即 $y=xu,$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx},$$

代入原式,得 $u+x\dfrac{du}{dx}=f(u),$

即 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{f(u)-u}{x}.$

可分离变量的方程

当 $f(u)-u\neq 0$时，得 $\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\ln|C_1x|$,

即 $x=Ce^{\varphi(u)}$, $\quad\left(\varphi(u)=\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}\right)$

将 $u=\frac{y}{x}$代入， 得通解 $x=Ce^{\varphi(\frac{y}{x})}$,

当$\exists u_0$, 使 $f(u_0)-u_0=0$, 则 $u=u_0$是新方程的解,

代回原方程，得齐次方程的解 $y=u_0x$.

例4 求解微分方程

$$\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+x\cos\frac{y}{x}\mathrm{d}y=0.$$

解 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $\mathrm{d}y=u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u$,

$$(x-ux\cos u)\mathrm{d}x+x\cos u(u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u)=0,$$

$$\cos u\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x},\qquad \sin u=-\ln x+C,$$

微分方程的通解为 $\sin\dfrac{y}{x}=-\ln x+C.$

例5 求解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{\mathrm{d}y}{2y^2-xy}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2y^2-xy}{x^2-xy+y^2}=\frac{2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2},$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

$$u+xu'=\frac{2u^2-u}{1-u+u^2},$$

$$[\frac{1}{2}(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u})-\frac{2}{u-2}+\frac{1}{u-1}]\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

$$\ln(u-1)-\frac{3}{2}\ln(u-2)-\frac{1}{2}\ln u=\ln x+\ln C,$$

$$\frac{u-1}{\sqrt{u}(u-2)^{\frac{3}{2}}}=Cx.$$

微分方程的解为 $(y-x)^2=C^2y(y-2x)^3.$

三、一阶线性微分方程

一阶线性微分方程的标准形式:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

当 $Q(x)\equiv 0$, 上面方程称为**齐次的**.

当 $Q(x)\not\equiv 0$, 上面方程称为**非齐次的**.

例如 $\frac{dy}{dx}=y+x^2$, $\frac{dx}{dt}=x\sin t+t^2$, 线性的;

$yy'-2xy=3$, $y'-\cos y=1$, 非线性的.

一阶线性微分方程的**解法**

1. 一阶线性齐次方程 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0.$$

由分离变量法

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x,\quad \int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int P(x)\mathrm{d}x,$$

$$\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+C_1,$$

齐次方程的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$

2. 一阶线性非齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x).$

讨论 $\because \dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\left[\dfrac{Q(x)}{y}-P(x)\right]\mathrm{d}x,$

两边积分 $\ln|y|=\int\dfrac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x-\int P(x)\mathrm{d}x,$

设 $\int\dfrac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x$为$v(x)$, $\therefore \ln|y|=v(x)-\int P(x)\mathrm{d}x,$

即非齐次方程通解形式 $y=e^{v(x)}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$

对照 齐次方程的通解$y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

常数变易法

把齐次方程通解中的常数变易为待定函数的方法.

实质: 未知函数的变量代换.

新未知函数 $u(x) \Rightarrow$ 原未知函数 $y(x)$,

作变换 $$y = u(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

$$y' = u'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + u(x)[-P(x)]e^{-\int P(x)\mathrm{d}x},$$

将y和y'代入原方程得 $u'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x)$,

$$\therefore\quad u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C,$$

一阶线性非齐次微分方程的通解为:

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\underbrace{Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}_{\text{对应齐次方程通解}}+\underbrace{e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解}}$$

例6 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{y}{x}=x^2$的通解.

解 第一步，求相应的齐次方程的通解

$$y'-\frac{1}{x}y=0, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\therefore \ln|y|=\ln|x|+c_1$$

$\therefore$ 齐次方程的通解为 $y=cx.$

例6 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{y}{x}=x^2$的通解.

解 第二步，常数变易法求非齐次方程的通解

令$y=u(x)x$，则$y'=u'(x)x+u(x)$

代入方程得 $u'(x)x=x^2$ 即$u'(x)=x$

$$\therefore\quad u(x)=\frac{x^2}{2}+c$$

$\therefore$所求通解为 $y=\frac{x^3}{2}+cx.$

例7 求方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$ 的通解.

解 $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = \frac{\sin x}{x}$,

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\int \frac{1}{x}dx}dx + C\right)$$

$$= e^{-\ln x}\left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\ln x}dx + C\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\int \sin x dx + C\right) = \frac{1}{x}(-\cos x + C).$$

例8 求方程$(y^2-6x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0$的通解.

解 方程化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{3}{y}x=-\frac{y}{2}$$

相对应于x及其导数而言，是一次方程，故先求$x(y)$. 其中

$$P(y)=-\frac{3}{y},\quad Q(y)=-\frac{y}{2},$$

所以 $$x = e^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\left(\int Q(y)\cdot e^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + C\right)$$

$$= e^{3\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left(\int (-\frac{y}{2})\cdot e^{-3\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + C\right)$$

$$= e^{3\ln y}\left(-\int \frac{y}{2}\cdot e^{-3\ln y}\mathrm{d}\,y + C\right)$$

$$= y^3\left(\frac{1}{2y} + C\right)$$ 为所求通解.

四、利用变量代换求微分方程的解

例10 求 $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$ 的通解.

解 令 $x+y=u$, $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1$ 代入原方程

$$\frac{du}{dx}=1+u^2$$ 解得 $\arctan u=x+C$,

代回 $u=x+y$,得 $\arctan(x+y)=x+C$,

原方程的通解为 $y=\tan(x+C)-x$.

例11 用适当的变量代换解下列微分方程:

1. $2yy' + 2xy^2 = xe^{-x^2}$ 贝努利方程

解 $y' + xy = \frac{1}{2}xe^{-x^2}y^{-1}$,

令 $z = y^{1-(-1)} = y^2$, 则 $\frac{dz}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$,

$\therefore \frac{dz}{dx} + 2xz = xe^{-x^2}$, $z = e^{-\int 2x dx}[\int xe^{-x^2}e^{\int 2x dx}dx + C]$

所求通解为 $y^2 = e^{-x^2}(\frac{x^2}{2} + C)$.

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x\sin^2(xy)}-\dfrac{y}{x}$;

解 令 $z=xy$, 则 $\dfrac{dz}{dx}=y+x\dfrac{dy}{dx}$,

$$\frac{dz}{dx}=y+x\left(\frac{1}{x\sin^2(xy)}-\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{\sin^2 z},$$

分离变量法得 $2z-\sin 2z=4x+C$,

将 $z=xy$ 代回,

所求通解为 $2xy-\sin(2xy)=4x+C$.

3. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y}$;

解 令 $x+y=u$, 则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}-1$,

代入原式 $\dfrac{du}{dx}-1=\dfrac{1}{u}$,

分离变量法得 $u-\ln(u+1)=x+C$,

将 $u=x+y$ 代回, 所求通解为

$y-\ln(x+y+1)=C$, 或 $x=C_1e^y-y-1$

另解 方程变形为 $\dfrac{dx}{dy}=x+y$.（一阶线性微分方程）