第四节 可降阶的二阶微分方程

一、$y'' = f(x)$型的微分方程

二、$y'' = f(x, y')$型的微分方程

三、$y'' = f(y, y')$型的微分方程

一、 $y'' = f(x)$ 型

特点： 等式右端仅含有自变量 $\boldsymbol{x}$.

解法： 将 y'视为新的未知函数，

则 $y' = \int f(x)\mathrm{d}x + C_1.$

同理可得$y = \int[\int f(x)\mathrm{d}x + C_1]\mathrm{d}x + C_2$

可得通解.

例1 求微分方程 $y'' = e^{2x} - \sin\dfrac{x}{3}$ 的通解.

解　对所给方程连续积分两次，得

$$y' = \frac{1}{2}e^{2x} + 3\cos\frac{x}{3} + C_1$$

$$y = \frac{1}{4}e^{2x} + 9\sin\frac{x}{3} + C_1 x + C_2$$

二、 $y'' = f(x, y')$ 型

特点： 右端不显含未知函数 y.

解法： 设 $y' = p$ $\quad y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = p'$,

方程变为 $p' = f(x, p)$. —— 关于 x, p 的一阶微分方程，设其通解为 $p = \varphi(x, C_1)$

即 $$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(x, C_1)$$

故方程的 通解为： $y = \int \varphi(x, C_1)\mathrm{d}x + C_2$

例2　求微分方程 $(1+x^2)y''=2xy'$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=3$ 的特解.

解：　设$y'=p$,代入方程并分离变量后　可得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

两端积分得

$$\ln|p|=\ln(1+x^2)+C$$

即　$$p=y'=C_1(1+x^2)\qquad (C_1=\pm e^C)$$

由条件$y'\big|_{x=0}=3$，得$C_1=3$

故 $y'=3(1+x^2)$

积分得 $y=x^3+3x+C_2$

又由条件$y\big|_{x=0}=1$得$C_2=1$

$\therefore$所求特解为 $y=x^3+3x+1.$

三、$y'' = f(y, y')$ 型

特点： 方程中不明显地含有自变量x.

解法： 设 $y' = p(y)$ 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{dy}$,

方程化为关于y, p的一阶微分方程 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$

设它的通解为： $y' = p = \varphi(y, C_1)$

分离变量并积分，可得原方程的通解为：

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

例 3 求方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解一 设 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,

代入原方程得 $y \cdot p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 = 0$, 即 $p(y \cdot \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p) = 0$,

由 $y \cdot \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p = 0$, 可得 $p = C_1 y$,

即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1 y$, 所以原方程的通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$.

解二 两端同乘不为零因子 $\frac{1}{y^2}$,

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'}{y}\right) = 0,$$

故 $y' = C_1 y$,

从而通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$.

解三 原方程变为 $\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}$,

两边积分,得 $\ln y' = \ln y + \ln C_1$, 即 $y' = C_1 y$,

原方程的通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$.

※**例4** 求方程 $xyy''-xy'^2=yy'$ 的通解.

解 将 $y=e^{\int z\mathrm{d}x}$

代入原方程,得 $z'x=z$,

解其通解为 $z=Cx$,

原方程通解为

$$y=e^{\int Cx\mathrm{d}x}=C_2e^{C_1x^2}.$$