第九节 差分方程的简单经济应用

差分方程在经济领域的应用十分广泛，下面从具体的实例体会其应用的场合和应用的方法.

例一:(存款模型)设S_t为t年存款总额，r为年利率，设$S_{t+1}=S_t+rS_t$，且初始存款额为S_0，求t年末的本利和.

解

$$S_{t+1}=S_t+rS_t$$

即

$$S_{t+1}-(1+r)S_t=0$$

这是一个一阶常系数线 性齐次差分方程 .

特征方程为 $\lambda-(1+r)=0,$

特征方程的根为 $\lambda=1+r,$

于是齐次方程的通解为 $S_t=C(1+r)^t$

代入初始条件，得$C=S_0$

因此，t年末的本利和为 $S_t=S_0(1+r)^t.$

这就是一笔本金S_0存入银行后，年利率为 $r,$

按年复利计息，t年末的本利和.

例2设P_t, S_t和D_t分别为某种商品在t时刻的价格、供给量和需求量，这里t且取离散值，

例如$t = 0,1,2,3,\cdots$，由于t时刻的供给量S_t决定于t时刻的价格，且价格越高，供给量越大，因此常用的线性模型为

$$S_t = -c + dP_t,$$

同样的分析可得

$$D_t = a - bP_t$$

这里a，b，c，d均为正常数．

实际情况告诉我们，

t时期的价格P_t由$t-1$时期的价格P_{t-1}与供给量与需求量之差$S_{t-1}-D_{t-1}$，按下述关系

$$P_t = P_{t-1} - \lambda\left(S_{t-1} - D_{t-1}\right)$$

而确定（其中λ为常数）.

1.求供需相等时的价格P_e(均衡价格）；

2.求商品的价格随时间的变化规律.

解 1.由$D_t = S_t$可得，$P_e = \dfrac{a+c}{b+d}$;

2.由题意可得

$$P_t = P_{t-1} - \lambda\left(S_{t-1} - D_{t-1}\right)$$

$$= P_{t-1} - \lambda\left(-a + bP_{t-1} - \left(c - dP_{t-1}\right)\right)$$

即 $$P_t - \left(1 - b\lambda - d\lambda\right)P_{t-1} = \lambda\left(a + c\right)$$

这是一个一阶常系数线 性非齐次差分方程.

其齐次方程的通解为

$$P_t = C(1 - b\lambda - d\lambda)^t$$

原方程的一个特解为

$$P_t^* = \frac{a+c}{b+d} = P_e$$

原方程的通解为

$$P_t = C(1 - b\lambda - d\lambda)^t + P_e$$

由于初始条件P_0一般已知，故由$P_0 = C + P_e$

可得$C = P_0 - P_e$,

从而，$P_t = (P_0 - P_e)(1 - b\lambda - d\lambda)^t + P_e$.

例3在农业生产中，种植先于产出及产品出售一个适当的时期，t时期该产品的价格P_t决定着生产者在下一时期愿意提供给市场的产量S_{t+1}，还决定着本时期该产品的需求量D_t，因此有

$$D_t = a - bP_t,\quad S_t = -c + dP_{t-1}$$

（其中a，b，c，d均为正常数）

假设每一时期的价格总是确定在市场售清的水平上，即$S_t = D_t$.

1.求价格随时间变动的规律；

2.讨论市场价格的种种变化趋势.

解 1.由$S_t = D_t$可得，$-c + dP_{t-1} = a - bP_t$

即$bP_t + dP_{t-1} = a + c$

即$P_t + \frac{d}{b}P_{t-1} = \frac{a+c}{b}$

这是一个一阶常系数线性非齐次差分方程．

其齐次方程的通解为 $P_t = C\left(-\frac{d}{b}\right)^t$

原方程的一个特解为 $P_t^* = \frac{a+c}{b+d}$

原方程的通解为 $P_t = C\left(-\frac{d}{b}\right)^t + \frac{a+c}{b+d}$．

由于初始条件P_0一般已知，故由$P_0 = C + \dfrac{a+c}{b+d}$

可得$C = P_0 - \dfrac{a+c}{b+d}$，

从而$P_t = \left(P_0 - \dfrac{a+c}{b+d}\right)\left(-\dfrac{d}{b}\right)^t + \dfrac{a+c}{b+d}$．

2.分析市场趋向的种种形 态

(1) $\left|-\dfrac{d}{b}\right| < 1$　　$\lim\limits_{t\to+\infty} P_t = \dfrac{a+c}{b+d} = P_t^*$

这说明市场价格趋于平 衡，且特解 $P_t^* = \dfrac{a+c}{b+d}$

是一个平衡价格．

$$(2)\left|-\frac{d}{b}\right|>1 \qquad \lim_{t\to+\infty} P_t=\infty$$

这说明市场价格的波动 越来越大，且呈发散状 态.

$$(3)\left|-\frac{d}{b}\right|=1 \quad P_{2t}=P_0, \quad P_{2t+1}=2P_t^*-P_0$$

这说明市场价格呈周期 变化状态.

例4 (消费模型) 设y_t为t时期国民收入，C_t为t时期消费，I_t为t时期投资，他们之间有如下的关系式

$$\begin{cases} C_t = \alpha y_t + a \\ I_t = \beta y_t + b \\ y_t - y_{t-1} = \theta\left(y_{t-1} - C_{t-1} - I_{t-1}\right) \end{cases}$$

其中α，β，a，b和θ均为常数，且$0 < \alpha < 1$,

$0 < \beta < 1, 0 < \theta < 1, 0 < \alpha + \beta < 1$，$a \geq 0$，$b \geq 0.$

若基期的国民收入y_0已知，

试求y_t与t的函数关系.

解 由题意可得

$$y_t-\left[1+\theta(1-\alpha-\beta)\right]y_{t-1}=-\theta(a+b)$$

这是一个一阶常系数线性非齐次差分方程.

易求其方程的通解为

$$y_t=C\left[1+\theta(1-\alpha-\beta)\right]^t+\frac{a+b}{1-\alpha-\beta}$$

由y_0已知，得到

$$y_t=\left(y_0-\frac{a+b}{1-\alpha-\beta}\right)\left[1+\theta(1-\alpha-\beta)\right]^t+\frac{a+b}{1-\alpha-\beta}$$

这就是t时期国民收入随时间t变化的规律.