第三节　任意项级数的绝对与条件收敛

一、交错级数及其审敛法

二、绝对收敛与条件收敛

一、交错级数及其审敛法

定义: 正、负项相间的级数称为交错级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \text{或} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n \quad (\text{其中} u_n > 0)$$

定理 1　莱布尼茨定理　如果交错级数满足条件:

(i)　　　　　　　　　　　　; (ii)　　　　　　　,

则级数收敛, 且其和　　　　, 其余项　　的绝对值

　　　　.

证明 $\because u_{n-1} - u_n \geq 0,$

$\because s_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$

数列 s_{2n}是单调增加的,

又 $s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$

$\leq u_1$ 数列 s_{2n}是有界的,

$\therefore \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s \leq u_1.$ $\because \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0,$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} + u_{2n+1}) = s,$$

$\therefore$ 级数收敛于和 s, 且 $s \le u_1$.

余项 $r_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots)$,

$$|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots,$$

满足收敛的两个条件， $\therefore |r_n| \le u_{n+1}$.

定理证毕.

例1 **判别交错级数** $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ **的敛散性.**

解 $\because u_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$

又 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$

故级数收敛.

例 2 判别级数　　　　　　　　的收敛性.

解　$\because \left(\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\right)' = \dfrac{-(1+x)}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0 \quad (x \geq 2)$

故函数 $\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ 单调递减， $\therefore u_n > u_{n+1}$，

又 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n-1} = 0.$　　原级数收敛.

注意

1. 莱布尼茨判别法是判定级数收敛的充分而非必要条件;

思考：莱布尼茨判别法的条件其中之一不成立，结果如何?

2. 判定 $u_{n+1} < u_n$的方法

$$1)\ u_{n+1} - u_n < 0; \qquad 2)\ \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1;$$

3）相应函数的单调性 .

二、绝对收敛与条件收敛

定义：正项和负项任意出现的级数称为任意项级数.

任意项级数的各项取绝对值

任意项级数 ⟹ 正项级数

问题：如何研究任意项级数的敛散性问题？

任意项级数的敛散性

1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛：$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛；

2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛：$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

定理 2 若 收敛, 则 收敛.

证明 令 $v_n = \dfrac{1}{2}(u_n + |u_n|) \quad (n = 1,2,\cdots),$

显然 $v_n \geq 0,$ 且 $v_n \leq |u_n|,$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,

又 $\because \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (2v_n - |u_n|),$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例 3 判别级数 的收敛性.

解 $\because \left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛,

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right|$ 收敛,

故由定理知原级数收敛.

定理 3 如果任意项级数

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho \qquad \rho \qquad +\infty$$

满足条件$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ （其中 可以为 ）

则当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 时，级数 收敛，且绝对收敛；

当 时，级数 发散

例 4 判别下列级数的收敛性:

(1) ; (2) ;

(3)

∞

解 (1) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0$$

则此级数对一切 绝对收敛

$$(2)\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)!}|x|^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}|x|^2 = 0$$

则此级数对一切　　　　　　　　　　　　绝对收敛

$$(3)\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha - n}{n+1}x\right| = |x|$$

则当　　　　时，级数收敛；当　　　　时，级数发散，

而　　　　时，级数是否收敛取决于 $|$ 为何值. x