一、集合的概念

集合　具有某种特定性质的事物的总体.

元素　组成这个集合的事物称为该集合的元素.

集合与元素的关系:

$$a \in M, \qquad a \notin M$$

由无限个元素组成的集合称为无限集.

由有限个元素组成的集合称为有限集.

集合举例

(1) 2005年在广东地区出生的人.

结束放映

(2) 方程 $x^2-3x+2=0$ 的根.

(3) 全体奇数.

(4) 抛物线 $y=x^2$ 上的所有点.

集合表示方法

1. 例举法：即在 { } 中按任意顺序、不遗漏、不重复地列出集合的所有元素. 例如

(1) 若 A 仅由有限个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成,

(2) 由方程 $x^2-3x+2=0$ 的根构成的集合,

可记为 $A=\{1,2\}$.

结束放映

2. 描述法: $M=\{x \mid x$ 所具有的特征$\}$

(1) 由方程 $x^2-3x+2=0$ 的根构成的集合,

可记为 $M=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$.

(2) 全体奇数的集合, 可记为

$$M=\{x \mid x=2n+1, n\in Z\}.$$

集合之间的关系

若 $x\in A \Longrightarrow x\in B$, 则称 A是 B 的子集,

记为 $A\subset B$.

若 $A \subset B$, 且 $B \subset A$, 就称集合 A 和 B 相等,

记为 $A = B$.

例如, $A = \{1,2\}$, $M = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} \Longrightarrow$

$$A = M.$$

若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$, 则称集合 A 是 B 的真子集,

记为 $A \subsetneqq B$.

空集　不包含任何元素的集合, 记为 $\varnothing$.

例如, $\{x \mid x \in R, x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$.

规定:　空集为任何集合的子集.

结束放映

数集　元素都是数的集合称为数集.

数集分类:

N-- 自然数集　Z-- 整数集

Q-- 有理数集　R-- 实数集

数集间的关系: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

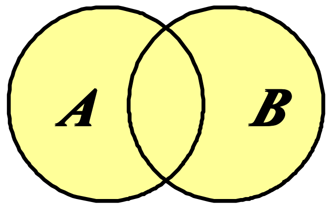
注: 如无特别说明, 本课程中提到的数都是实数.

结束放映

二、 集合的运算

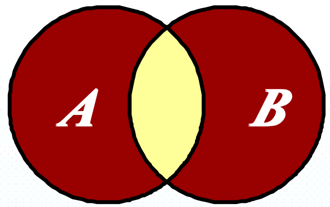
设 A,B是两个集合，定义

(1) A与B的并集(简称并)



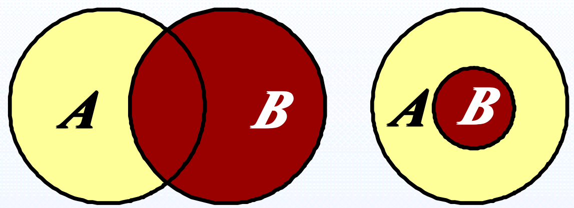
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 与 } x \in B\};$$

(2) A与B的交集(简称交)



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\};$$

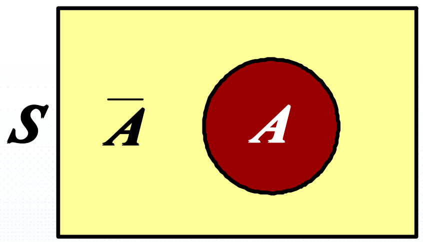
(3) A与B的差集(简称差)



$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\};$$

(4) 当所研究的问题限定在一个大的集合S中进行，所研究的其他集合A都是S的子集. 定义A的余集或补集

$$\overline{A}=S-A.$$



例如, 在实数集R中, 集合 $A=\{x\,|\,0<x\leq 1\}$ 的余集就是

$$\overline{A}=\{x\,|\,x\leq 0 \text{或} x>1\}.$$

三、集合的基本运算规律

设A,B,C为任意三个集合，则有下列法则成立:

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A;$

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$

$(A\cup B)\cap C=A\cap(B\cup C);$

(3) 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C);$

(4) 对偶律 $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}.\quad \overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}.$

结束放映

证 (4) $x \in \overline{(A \cup B)} \Longleftrightarrow x \notin A \cup B \Longleftrightarrow$ $x \notin A$ 且 $x \notin B \Longleftrightarrow x \in \overline{A}$ 且 $x \in \overline{B} \Longleftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

$\therefore \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B},$

注 以上证明中，符号"$\Longleftrightarrow$"表示"等价", 另一个常用符号是"$\Longrightarrow$", 表示"推出"(或"蕴含").

两集合间的直积或笛卡尔 (*Descartes*) 乘积

设 A, B 是任意两个集合，任取 $x \in A, y \in B$, 组成一个有序对 (x, y), 以这样的有序对的全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积，记为

结束放映

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ 且 } y \in B\}.$$

如 $R \times R = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合，$R \times R$ 常记作 R^2.

四、区间

定义　介于某两个实数之间的全体实数称为区间，这两个实数叫做区间的端点.

设 $a, b \in R$, 且 $a < b$, 定义

开区间　$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$;

闭区间　$[a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}$;

结束放映

半开区间 $[a,b) = \{x \mid a \le x < b\}$,

$(a,b] = \{x \mid a < x \le b\}$;

无限区间 $[a,+\infty) = \{x \mid a \le x\}$,

$(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$;

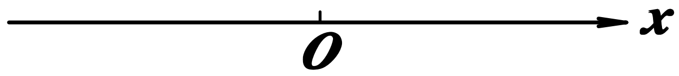
特别地 $(-\infty,+\infty) = R.$

区间的长度

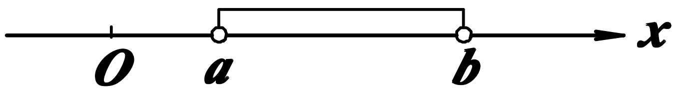
两端点间的距离(线段的长度)称为区间的长度.

结束放映

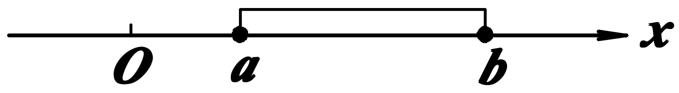
区间演示图



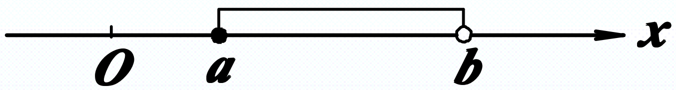
$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$;



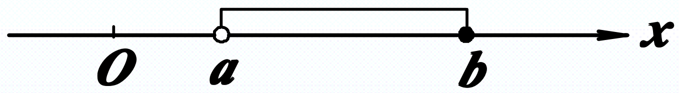
$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$;



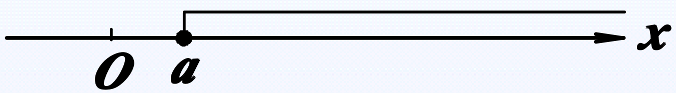
$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$;



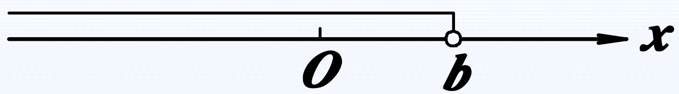
$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$;



$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$;



$[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}$;



$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$.

结束放映

五、邻域

定义　设a与δ是两个实数，且$\delta > 0$，数集

$$\{x \mid |x-a| < \delta\}$$

称为点a的δ邻域. 记为

$$U(a,\delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}.$$

其中，点a叫做该邻域的中心，δ叫做该邻域的半径.

点a的去心的δ邻域，记为$\mathring{U}(a,\delta)$，

即　$$\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

以a为中心的任何开区间均是点a的邻域，记为$U(a)$.

结束放映