



## 极限概念的引入

极限概念是由于求某些实际问题的精确解答而产生的.

我国古代数学家刘徽(公元3世纪)利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法:割圆术,就是极限思想在几何学上的应用.

### 1、割圆术:

割之弥细, 所失弥少, 割之又割, 以至不可割, 则与圆周合体而无所失矣.

刘徽



## 2、截丈问题：

一尺之棰，日截其半，万世不竭。

**注：** 在实际问题中逐渐形成的这种极限方法，已成为高等数学中的一种基本方法。



## 一、数列极限的定性描述

按一定次序排列的无穷多个数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

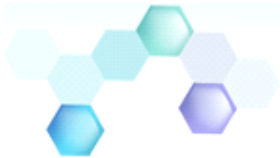
称为无穷数列, 简称**数列**. 可简记为  $\{x_n\}$ . 其中的每个数称为数列的项,  $x_n$  称为**通项**(一般项).

**注: (1)** 数列可看作数轴上一个动点, 它在数轴上依次取值

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots;$$

**(2)** 数列可看作自变量为正整数  $n$  的函数:

$$x_n = f(n).$$

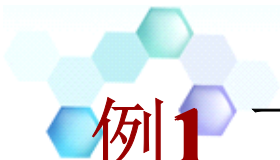


**定义1** 设有数列 $\{x_n\}$ 与常数 $a$ , 如果当 $n$ 无限增大时,  $x_n$ 无限接近于 $a$ , 则称常数 $a$ 为数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $a$ , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ 或 } x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty).$$

如果一个数列没有极限, 就称该数列是发散的.

**注:** 记号  $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$  常读作: 当 $n$ 趋于无穷大时,  $x_n$ 趋于 $a$ .



**例1** 下列各数列是否收敛, 若收敛, 试指出其收敛于何值.

(1)  $\{2^n\}$ ; (2)  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$  (3)  $\{(-1)^{n+1}\}$ ; (4)  $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$

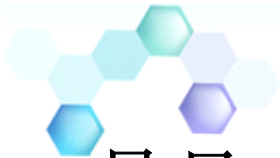
**解** (1) 数列  $\{2^n\}$  即为

$$2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$$

易见, 当  $n$  无限增大时,  $2^n$  也无限增大, 故该数列是发散的;

(2) 数列  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$  即为

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$



易见, 当  $n$  无限增大时,  $\frac{1}{n}$  无限接近于  $0$ , 故该数列收敛于  $0$ ;

(3) 数列  $\{(-1)^{n+1}\}$  即为

$$1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$$

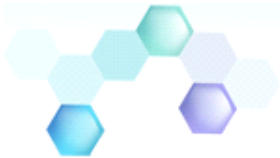
易见, 当  $n$  无限增大时,  $(-1)^{n+1}$  无休止地反复取  $1$ 、 $-1$  两个数, 而不会无限接近于任何一个确定的常数, 故该数列是发散的;

(4) 数列  $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$  即为

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$$



易见, 当  $n$  无限增大时,  $\frac{n-1}{n}$  无限接近于  $1$ , 故该数列收敛于  $1$ .



## 二、数列极限的定量描述

观察数列  $\{1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$  当  $n \rightarrow \infty$  时的变化趋势.

实验表明:当  $n$  无限增大时, 上述数列无限接近于 **1**.

**问题:**当  $n$  无限增大时,  $\{x_n\}$  是否无限接近于某一确定的数值? 如何用数学语言刻画“无限接近”.

**记号:**  $\forall$  --- 对每一个或任给的;  $\exists$  --- 存在.

数列  $\{x_n\}$  无限接近数  $a$  的数学描述:

$\forall \varepsilon > 0$ , 是否  $\exists N > 0$ , 使当  $n > N$  时, 恒有  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

**定义** 若对于任意给定的正数  $\varepsilon$  (不论它多么小),





总存在正整数  $N$ , 使得对于  $n > N$  时的一切  $x_n$ , 不等式  $|x_n - a| < \varepsilon$  都成立, 则称常数  $a$  是数列  $\{x_n\}$  的**极限**, 或称数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$ , 记为

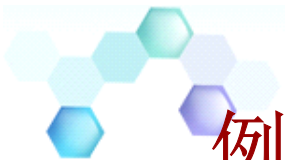
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty).$$

如果数列没有极限, 就说数列是发散的.

**注意:** 定义中的  $N$  与任意给定的正数  $\varepsilon$  有关.

**$\varepsilon - N$  定义:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ , 使当  $n > N$  时,  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

**注意:** 数列极限的定义来给出求极限的方法.



**例2** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} = 1$ .

**证** 由  $|x_n - 1| = \left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n}$

故对任给  $\varepsilon > 0$ , 要使  $|x_n - 1| < \varepsilon$ ,

只要  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , 即  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ .

所以, 若取  $N = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right]$ , 则当  $n > N$  时, 就有

$$\left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| < \varepsilon .$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} = 1 .$$