极限概念的引入

极限概念是由于求某些实际问题的精确解答而产生的.

我国古代数学家刘徽(公元3世纪)利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法:割圆术,就是极限思想在几何学上的应用.

1、割圆术:

割之弥细, 所失弥少, 割之又割, 以至不可割, 则与圆周合体而无所失矣. 刘徽

结束放映

2、截丈问题:

一尺之棰，日截其半，万世不竭.

注:　在解决实际问题中逐渐形成的这种极限方法,已成为高等数学中的一种基本方法.

结束放映

一、数列极限的定性描述

按 一定次序排列的无穷多个数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称为无穷数列, 简称数列. 可简记为$\{x_n\}$. 其中的每个数称为数列的项, x_n 称为通项(一般项).

注: (1) 数列可看作数轴上一个动点, 它在数轴上依次取值 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots;$

(2) 数列可看作自变量为正整数 n的函数:

$$x_n = f(n).$$

结束放映

定义1 设有数列$\{x_n\}$与常数 a, 如果当 n 无限增大时，x_n 无限接近于 a，则称常数 a 为数列$\{x_n\}$收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \text{或} \quad x_n \to a(n\to\infty).$$

如果一个数列没有极限，就称该数列是发散的.

注：记号 $x_n \to a(n\to\infty)$常读作: 当 n 趋于无穷大时，x_n 趋于 a.

结束放映

例1 下列各数列是否收敛, 若收敛, 试指出其收敛于何值.

(1) $\{2^n\}$;　(2) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$;　(3) $\{(-1)^{n+1}\}$;　(4) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$.

解 (1) 数列$\{2^n\}$即为

$$2,4,8,\cdots,2^n,\cdots$$

易见, 当 n无限增大时, 2^n 也无限增大, 故该数列是发散的;

(2) 数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$即为

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

易见，当 n 无限增大时，$\frac{1}{n}$ 无限接近于0，故该数列收敛于0；

(3) 数列 $\{(-1)^{n+1}\}$ 即为

$$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$$

易见，当 n 无限增大时，$(-1)^{n+1}$ 无休止地反复取 1、-1 两个数，而不会无限接近于任何一个确定的常数，故该数列是发散的；

(4) 数列 $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ 即为

$$0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots$$

结束放映

易见，当 n 无限增大时，$\dfrac{n-1}{n}$ 无限接近于1，故该数列收敛于1.

结束放映

二、数列极限的定量描述

观察数列$\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$当$n\to\infty$时的变化趋势.

实验表明:当n无限增大时,上述数列无限接近于1.

问题:当n无限增大时,$\{x_n\}$是否无限接近于某一确定的数值?如何用数学语言刻画"无限接近".

记号: $\forall$ --- 对每一个或任给的; $\exists$ --- 存在.

数列$\{x_n\}$无限接近数a的数学描述:

$\forall\varepsilon>0$,是否$\exists N>0$,使当$n>N$时,恒有$|x_n-a|<\varepsilon$.

定义　若对于任意给定的正数ε(不论它多么小),

结束放映

总存在正整数N, 使得对于$n > N$时的一切x_n,
不等式$|x_n - a| < \varepsilon$都成立, 则称常数a是数列$\{x_n\}$
的极限, 或称数列$\{x_n\}$收敛于a, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \text{或} \quad x_n \to a(n \to \infty).$$

如果数列没有极限, 就说数列是发散的.

注意: 定义中的N与任意给定的正数ε有关.

$\varepsilon - N$定义: $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 使当
$n > N$时, $|x_n - a| < \varepsilon.$

注意: 数列极限的定义未给出求极限的方法.

结束放映

例2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

证 由 $|x_n-1|=\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}$

故对任给 $\varepsilon>0$, 要使 $|x_n-1|<\varepsilon$,

只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$, 即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

所以，若取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, 则当 $n>N$ 时，就有

$$\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon.$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$$

结束放映