函数极限的引入

数列可看作自变量为正整数 n 的函数: $x_n = f(n)$, 数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a, 即：当自变量 n 取正整数且无限增大 $(n \to \infty)$ 时, 对应的函数值 $f(n)$ 无限接近数 a. 若将数列极限概念中自变量 n 和函数值 $f(n)$ 的特殊性撇开,可以由此引出函数极限的一般概念：在自变量 x 的某个变化过程中,如果对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某个确定的数 A, 则 A 就称为 x 在该变化过程中函数 $f(x)$ 的极限.

显然， 极限 A 是与自变量 x 的变化过程密切相关

结束放映

下面将分类进行讨论.

一、自变量趋向无穷大时函数的极限

定义2: 如果当 x 的绝对值无限增大时, 函数 $f(x)$ 无限接近于常数 A, 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty).$$

如果在上述定义中, 限制 x 只取正值或者只取负值,

即有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$,

结束放映

则称常数A为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 或 $x \to -\infty$时的极限.

定理1 极限 $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) A.$$

结束放映

例1 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

解 因为当 x 的绝对值无限增大时,

$\frac{1}{x}$ 无限接近于 0,

即函数 $1+\frac{1}{x}$ 无限接近于常数1,

所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1.$$

结束放映

二、自变量趋向有限值时函数的极限

现在研究自变量 x 无限接近有限值 x_0 (即 $x \to x_0$) 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势.

定义3 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心领域内有定义. 如果当 $x \to x_0 (x \neq x_0)$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于常数 A, 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限. 记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A (x \to x_0).$$

结束放映

例2 试根据定义说明下列结论：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$;　(2) $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$($C$为常数).

解 (1) 当自变量 x 趋于 x_0 时，显然，函数 $y = x$ 也趋于 x_0，故 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$;

(2) 当自变量 x 趋于 x_0 时，函数 $y = C$ 始终取相同的值 C，故

$$\lim_{x\to x_0} C = C.$$

结束放映

三、函数的左极限与右极限

当自变量 x 从左侧(或右侧)趋于 x_0 时， 函数 $f(x)$ 趋于常数 A ，则称 A 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限(或右极限)，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$$

注意到 $x\to x_0$ 意味着同时考虑 $x\to x_0^+$ 与 $x\to x_0^-$，可以得到下面的定理:

定理2　极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) A.$$

结束放映

例 3 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x+1, & x<0 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x+1) = 1,$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0.$

即有 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x),$

所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

结束放映

函数极限的定量描述

与数列极限类似，我们可用定量描述方式来给出函数极限的定义，这里仅以自变量趋于有限值时的极限为例.

定义　设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义. 若对任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正数δ，使得对于满足不等式　$0<|x-x_0|<\delta$　的一切x，恒有$|f(x)|<\varepsilon$，则称常数A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限. 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

或

$$f(x)\to A\quad (当\ x\to x_0)$$

结束放映

四、极限的性质

利用函数极限的定义，可得到函数极限的一些重要性质. 下面仅以 $x \to x_0$ 的极限形式为代表不加证明地给出这些性质，至于其他形式的极限的性质，只需作出些修改即可得到.

性质1(唯一性) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则其极限是唯一的.

性质2(有界性) 若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 必在 x_0 的某个去心邻域内有界.

结束放映

性质3(保号性) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$),

则在x_0的某个去心邻域内恒有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

推论1 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,且在 x_0 的某去心邻域内恒有

$f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$),则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

结束放映