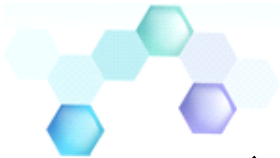




## 函数极限的引入

数列可看作自变量为正整数  $n$  的函数:  $x_n = f(n)$ , 数列  $\{x_n\}$  的极限为  $a$ , 即: 当自变量  $n$  取正整数且无限增大 ( $n \rightarrow \infty$ ) 时, 对应的函数值  $f(n)$  无限接近数  $a$ . 若将数列极限概念中自变量  $n$  和函数值  $f(n)$  的特殊性撇开, 可以由此引出函数极限的一般概念: 在自变量  $x$  的某个变化过程中, 如果对应的函数值  $f(x)$  无限接近于某个确定的数  $A$ , 则  $A$  就称为  $x$  在该变化过程中函数  $f(x)$  的极限. 显然, 极限  $A$  是与自变量  $x$  的变化过程密切相关



下面将分类进行讨论.

## 一、自变量趋向无穷大时函数的极限

**定义2:** 如果当  $x$  的绝对值无限增大时, 函数  $f(x)$  无限接近于常数  $A$ , 则称常数  $A$  为函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow \infty$  时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty).$$

如果在上述定义中, 限制  $x$  只取正值或者只取负值,

即有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$  或  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ,



则称常数  $A$  为函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow \infty$  或  $x \rightarrow -\infty$  时的  
极限.

**定理1** 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$$



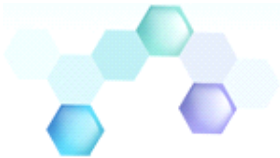
**例1** 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ .

**解** 因为当  $x$  的绝对值无限增大时,  
 $\frac{1}{x}$  无限接近于  $0$ ,

即函数  $1 + \frac{1}{x}$  无限接近于常数  $1$ ,

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$$



## 二、自变量趋向有限值时函数的极限

现在研究自变量  $x$  无限接近有限值  $x_0$  (即  $x \rightarrow x_0$ ) 时, 函数  $f(x)$  的变化趋势.

**定义3** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某一去心领域内有定义. 如果当  $x \rightarrow x_0 (x \neq x_0)$  时, 函数  $f(x)$  无限接近于常数  $A$ , 则称常数  $A$  为函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0).$$



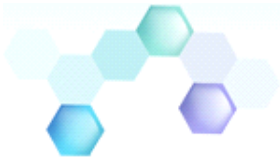
**例2** 试根据定义说明下列结论:

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0; \quad (2) \lim_{x \rightarrow x_0} C = C (C \text{ 为常数}).$$

**解** (1) 当自变量  $x$  趋于  $x_0$  时, 显然, 函数  $y = x$  也趋于  $x_0$ , 故  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ ;

(2) 当自变量  $x$  趋于  $x_0$  时, 函数  $y = C$  始终取相同的值  $C$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C.$$



### 三、函数的左极限与右极限

当自变量  $x$  从左侧(或右侧)趋于  $x_0$  时, 函数  $f(x)$  趋于常数  $A$ , 则称  $A$  为  $f(x)$  在点  $x_0$  处的左极限(或右极限), 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

注意到  $x \rightarrow x_0$  意味着同时考虑  $x \rightarrow x_0^+$  与  $x \rightarrow x_0^-$ , 可以得到下面的定理:

**定理2** 极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$



**例 3** 设  $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x+1, & x < 0 \end{cases}$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**解** 因为  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x+1) = 1,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

即有  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x),$

所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.





## 函数极限的定量描述

与数列极限类似，我们可用定量描述方式来给出函数极限的定义，这里仅以自变量趋于有限值时的极限为例。

**定义** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某一去心邻域内有定义。若对任意给定的正数  $\varepsilon$  (不论它多么小)，总存在正数  $\delta$ ，使得对于满足不等式  $0 < |x - x_0| < \delta$  的一切  $x$ ，恒有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称常数  $A$  为函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限。记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

或  $f(x) \rightarrow A$  (当  $x \rightarrow x_0$ )



## 四、极限的性质

利用函数极限的定义, 可得到函数极限的一些重要性质. 下面仅以  $x \rightarrow x_0$  的极限形式为代表不加证明地给出这些性质, 至于其他形式的极限的性质, 只需作出些修改即可得到.

**性质1(唯一性)** 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 则其极限是唯一的.

**性质2(有界性)** 若极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 则函数  $f(x)$  必在  $x_0$  的某个去心邻域内有界.



**性质3(保号性)** 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 且  $A > 0$  (或  $A < 0$ ), 则在  $x_0$  的某个去心邻域内恒有  $f(x) > 0$  (或  $f(x) < 0$ ).

**推论1** 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 且在  $x_0$  的某去心邻域内恒有  $f(x) \geq 0$  (或  $f(x) \leq 0$ ), 则  $A \geq 0$  (或  $A \leq 0$ ).